

Sommets et normales concourantes des courbes convexes de largeur constante et singularités des hérissons

Par

YVES MARTINEZ-MAURE

Abstract. Let $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ be a convex curve of constant width and of class C_+^4 . It is known that \mathcal{C} has at least 6 vertices and its interior contains either a point through which infinitely many normals pass or an open set of points through each of which pass at least 6 normals. If all its vertices are nondegenerate, then: (i) \mathcal{C} has exactly 6 vertices if, and only if, its evolute is the boundary of a topological disc through each interior point of which pass at least 6 normals; (ii) if \mathcal{C} has more than 6 vertices, then there exists an open set of points through each of which pass at least 10 normals. The proof: (i) expresses the number of normals passing through a point as a function of the index with respect to the evolute; (ii) relates this index to the number of singularities of the evolute (i.e. of vertices). Furthermore, we give formulas for counting singularities of generic hedgehogs in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 .

I. Introduction et résultats. Soit \mathcal{C} une courbe convexe du plan euclidien \mathbb{R}^2 . La fonction support de \mathcal{C} est définie par

$$h_{\mathcal{C}} : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto h_{\mathcal{C}}(\theta) = \max_{m \in \mathcal{C}} \langle m, u(\theta) \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique. La droite d'équation $\langle x, u(\theta) \rangle = h_{\mathcal{C}}(\theta)$ est la droite support de \mathcal{C} dans la direction $u(\theta)$: $h_{\mathcal{C}}(\theta)$ s'interprète comme la distance (signée) de cette droite à l'origine. La largeur de \mathcal{C} dans la direction $u(\theta)$ est la distance entre les droites support orientées orthogonales à $u(\theta)$, c'est-à-dire $h_{\mathcal{C}}(\theta) + h_{\mathcal{C}}(\theta + \pi)$. Si \mathcal{C} est de classe C^3 , le théorème des 4 sommets [3] assure que \mathcal{C} a au moins 4 sommets (i.e. points où sa courbure a une valeur stationnaire). Si \mathcal{C} est de largeur constante et de classe C_+^4 (i.e. C^4 et à courbure $K > 0$), alors \mathcal{C} a au moins 6 sommets [4] et son intérieur contient un point par lequel il passe une infinité de normales ou un ouvert formé de points par lesquels il passe au moins 6 normales [9]. Ces deux propriétés de \mathcal{C} sont étroitement liées :

Théorème 1. Soit \mathcal{C} une courbe convexe de largeur constante de classe C_+^4 . Si tous les sommets de \mathcal{C} sont non dégénérés (i.e. $K'' \neq 0$ lorsque $K' = 0$), alors : (i) \mathcal{C} a exactement 6 sommets si, et seulement si, sa développée est le bord d'un disque topologique dont l'intérieur est formé de points par lesquels il passe exactement 6 normales ;

(ii) si \mathcal{C} a plus de 6 sommets, alors l'intérieur de \mathcal{C} contient un ouvert formé de points par lesquels il passe au moins 10 normales.

La courbe \mathcal{C} est de largeur constante $2r$ si, et seulement si, sa fonction support peut s'écrire $h + r$, où h est une fonction de Möbius : $\forall \theta \in \mathbb{R}, h(\theta + \pi) = -h(\theta)$. La fonction h s'interprète alors comme la fonction support du hérisson projectif lieu des milieux des diamètres de \mathcal{C} . Rappelons la notion de 'hérisson projectif'. Nous savons que tout corps convexe $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est déterminé par sa fonction support $h_{\mathcal{K}}(p) = \max_{x \in \mathcal{K}} \langle x, p \rangle$. Une fonction $f \in C^2(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ n'est pas nécessairement la fonction support d'un corps convexe, mais nous pouvons toujours lui associer l'enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation $\langle x, p \rangle = f(p)$. Cette enveloppe est notée \mathcal{H}_f et appelée le hérisson de fonction support f . Elle est paramétrée par l'application $x_f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p \mapsto x_f(p)$, où $x_f(p)$ désigne l'unique solution du système

$$\begin{cases} \langle x, p \rangle = f(p) \\ \langle x, \cdot \rangle = df_p(\cdot) \end{cases}$$

soit $(\text{grad } f)(p) + f(p)p$. L'application x_f s'interprète comme la réciproque de l'application de Gauss de \mathcal{H}_f : toute partie régulière de \mathcal{H}_f admet une orientation transverse pour laquelle p est le vecteur normal en $x_f(p)$. Le hérisson \mathcal{H}_f est dit projectif lorsque f est antisymétrique : $\forall p \in \mathbb{S}^n, f(-p) = -f(p)$. L'application x_f est alors définie sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n/(\text{antipodie})$. Dans le plan : (i) un hérisson pas trop singulier (admettant une tangente en chaque point) est une courbe admettant exactement une tangente orientée dans chaque direction (fig. 1.b) ; (ii) un hérisson projectif pas trop singulier est une courbe admettant exactement une tangente non-orientée dans chaque direction (fig. 1.c) ; (iii) \mathcal{H}_f est régulier si, et seulement si, sa 'fonction de courbure' $R_f = f + f''$ n'a aucun zéro (R_f s'identifie au rayon de courbure de \mathcal{H}_f) : \mathcal{H}_f est alors une courbe convexe de classe C^2_+ (fig. 1.a). Dans le cas considéré, la courbe \mathcal{C} et le hérisson projectif \mathcal{H}_h , lieu des milieux des diamètres de \mathcal{C} , ont même développée (lieu des centres de courbure), à savoir le hérisson projectif de fonction support $f(\theta) = h'(\theta - \frac{\pi}{2})$. Rappelons que la développée n'est autre que l'enveloppe des normales, c'est-à-dire des droites d'équation $\langle x, u'(\theta) \rangle = h'(\theta)$ (toutes ces droites sont considérées comme des normales à \mathcal{H}_h , même lorsque \mathcal{H}_h est très singulier). Le nombre de normales passant par $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_f$ peut s'exprimer en fonction de l'indice de x par rapport à \mathcal{H}_f . Cet indice, noté $i_f(x)$, peut être défini comme le nombre algébrique d'intersection d'une demi-droite orientée d'origine x avec \mathcal{H}_f muni de son orientation transverse (nombre indépendant de la demi-droite pour un ouvert dense de directions). Le résultat est le suivant :

Théorème 2. Soit \mathcal{H}_h un hérisson de \mathbb{R}^2 de fonction support C^3 et soit \mathcal{H}_f sa développée, c'est-à-dire le hérisson de fonction support $f(\theta) = h'(\theta - \frac{\pi}{2})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_f$, le nombre de normales à \mathcal{H}_h passant par x est donné par

$$v_h(x) = 2(1 - i_f(x)),$$

où $i_f(x)$ désigne l'indice de x par rapport à \mathcal{H}_f .

Comme les normales à \mathcal{H}_h sont les droites support de sa développée \mathcal{H}_f , le Théorème 2 découle immédiatement du résultat suivant :

Théorème 3 [9]. Soit \mathcal{H}_h un hérisson de \mathbb{R}^2 . Pour tout $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$, l'indice de x par rapport à \mathcal{H}_h vérifie

$$i_h(x) = 1 - \frac{1}{2}n_h(x),$$

où $n_h(x)$ est le nombre des droites support orientées de \mathcal{H}_h passant par x , i.e. le nombre de zéros de la fonction $h_x : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto h(\theta) - \langle x, u(\theta) \rangle$.

Comme l'indice d'un hérisson projectif est à valeurs dans $2\mathbb{Z}_-$, on en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ une courbe convexe de largeur constante de classe C^3_+ et soit \mathcal{C}' sa développée. Le nombre de normales à \mathcal{C} passant par $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{C}'$ est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^2 - \mathcal{C}'$. Plus précisément, il est égal à 2 sur l'extérieur de \mathcal{C}' et de la forme $2(2k + 1)$, où $k \in \mathbb{N}^*$, sur chaque composante connexe de l'intérieur.

L'extérieur (resp. l'intérieur) de \mathcal{C}' est naturellement défini comme l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{C}'$ tels que \mathcal{C}' est (resp. n'est pas) homotope à un point dans $\mathbb{R}^2 - \{x\}$. Dans ce qui suit, l'épithète 'générique' attribué à un hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ signifie que h est de classe C^3 et que sa fonction de courbure $R_h = h + h''$ vérifie $R'_h \neq 0$ lorsque $R_h = 0$. Le Théorème 1 découle du Théorème 2 et du résultat suivant :

Théorème 4. Pour tout hérisson projectif générique $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{H}_h a exactement 3 points singuliers sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$;
- (ii) \mathcal{H}_h est une courbe fermée simple de \mathbb{R}^2 ;
- (iii) l'indice i_h est ≥ -2 sur $\mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$.

Les singularités d'un hérisson (resp. d'un hérisson projectif) générique de \mathbb{R}^2 sont des rebroussements de 1^{ère} espèce. Dans le cas d'un hérisson projectif générique, ils peuvent être dénombrés en fonction des auto-intersections transverses :

Théorème 5. Soit $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ un hérisson projectif générique dont tous les points doubles sont réguliers : $x_h(u) = x_h(v)$ implique $R_h(u)R_h(v) \neq 0$ si $u \neq v$. Notons s_h le nombre de rebroussements de \mathcal{H}_h et t_h^+ (resp. t_h^-) le nombre de paires $\{u, v\}$ de points réguliers distincts de $x_h : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant $x_h(u) = x_h(v)$ et $R_h(u)R_h(v) > 0$ (resp. $R_h(u)R_h(v) < 0$). Nous avons alors :

$$s_h = 3 + 2(t_h^+ - t_h^-)$$

En particulier, $s_h = 3$ en l'absence d'auto-intersection transverse (cf. Théorème 4).

E. Heil a établi que tout corps convexe de largeur constante de classe C^2 de \mathbb{R}^3 contient un point par lequel il passe une infinité de normales ou un ouvert formé de points par lesquels il passe au moins 10 normales [6-7]. Contrairement à son analogue dans \mathbb{R}^2 , ce résultat ne peut s'interpréter en termes de hérissons, même pour un corps convexe de classe C^2_+ , car

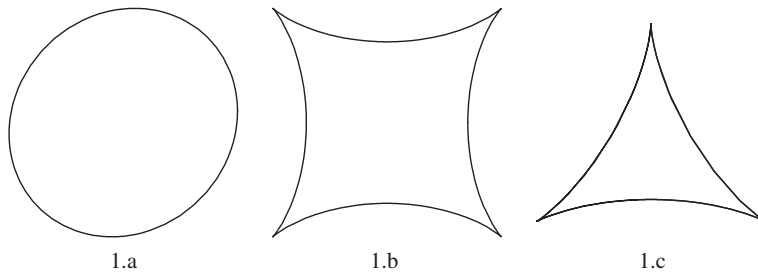


Figure 1.

l'enveloppe des normales (ou focale) d'une surface convexe de classe C^2_+ n'est généralement pas un hérisson.

Mais les singularités des hérissons génériques de \mathbb{R}^3 nous intéressent pour d'autres raisons. Les hérissons projectifs $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ dont la paramétrisation x_h est localement injective sauf au voisinage d'un nombre fini de points fournissent des modèles du plan projectif dans \mathbb{R}^3 pour lesquels l'application de Gauss est une bijection. En 1932, D. Hilbert et S. Cohn-Vossen s'interrogeaient déjà sur la distribution des normales dans les modèles du plan projectif réel, et notamment dans celui de la surface de Boy : "Unfortunately, the way in which (the spherical image) is distributed over the sphere has not been studied" [5]. À cet égard, les hérissons projectifs pas trop singuliers nous intéressent donc particulièrement. Nous avons donné dans [8], un modèle hérisson de la surface romaine de Steiner (comprenant quelques singularités non génériques mais qui surviennent lors de métamorphoses génériques).

Les singularités des hérissons génériques de \mathbb{R}^3 sont des arêtes de rebroussement et des queues d'aronde [10]. Les arêtes de rebroussement séparent les régions elliptiques des régions hyperboliques (fig 2.a) : la courbure de Gauss y est infinie. Les queues d'aronde sont leurs singularités (aux queues d'aronde, l'arête présente un rebroussement). On en distingue deux types suivant le signe de la courbure sur la 'queue' : queues d'arondes positives (dont la queue est courbée positivement, voir fig. 2.c) et 'négatives' (dont la queue est courbée négativement, voir fig. 2.b). Plus précisément, il existe un ouvert dense $\mathcal{U} \subset C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ pour la topologie C^4 tel que : pour tout $h \in \mathcal{U}$, les singularités de \mathcal{H}_h sont toutes équivalentes à l'un des 3 modèles de singularités représentés à la figure 2 [8]. Plus généralement, les travaux d'Arnold [1] permettent de classifier les singularités génériques des hérissons de \mathbb{R}^{n+1} , où $n \leq 5$, en considérant les $x_h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ comme des applications de Legendre [8]. Notre étude est en grande partie motivée par le problème suivant, soulevé par R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg dans [10] :

Existe-t-il un hérisson projectif $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ dont le lieu singulier est réduit à une (ou plusieurs) arête(s) de rebroussement(s) immergée(s) (i.e. sans queues d'aronde) ?

Une étude du lieu singulier des hérissons projectifs de \mathbb{R}^3 est donnée dans [9].

La fonction de courbure (inverse de la courbure de Gauss) de $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ est donnée sur \mathbb{S}^2 par $R_h(p) = \det(T_{p,x_h})$, où T_{p,x_h} est l'application tangente en p de $x_h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{H}_h$ (vue comme un endomorphisme de l'espace vectoriel tangent $T_p\mathbb{S}^2$). Le lieu singulier est donc donné par $R_h = 0$ sur \mathbb{S}^2 . Pour tout $h \in \mathcal{U}$, on a $dR_h \neq 0$ lorsque $R_h = 0$, si bien que le lieu

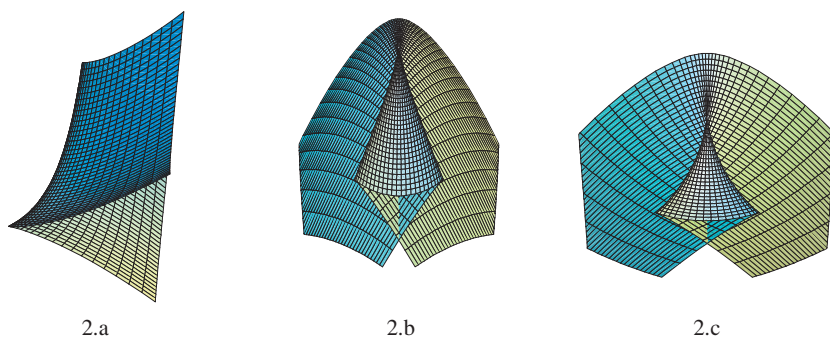


Figure 2.

singulier est formé sur \mathbb{S}^2 , d'une réunion finie et disjointe de courbes fermées simples et lisses, représentations sphériques des arêtes de rebroussement.

Dans le reste de la section, l'expression 'hérillon générique de \mathbb{R}^3 ' signifie 'hérillon de fonction support appartenant à \mathcal{U} ' et σ désigne la mesure de Lebesgue sphérique.

Proposition 1. Soit \mathcal{H}_h un hérillon générique de \mathbb{R}^3 et E une région de \mathbb{S}^2 telle que $x_h(E)$ soit une région elliptique de \mathcal{H}_h bordée d'arêtes de rebroussement. Pour toute composante Γ du bord orienté ∂E , nous avons

$$(1) \quad \int_{x_h(\Gamma)} K_g dS = \int_{\Gamma} k_g ds + (n_{\Gamma} - p_{\Gamma}) \pi,$$

où ds (resp. dS) désigne l'élément de volume de ∂E (resp. $\partial x_h(E)$), k_g (resp. K_g) sa courbure géodésique et p_{Γ} (resp. n_{Γ}) le nombre de queues d'aronde positives (resp. négatives) portées par $x_h(\Gamma)$.

Corollaire 2. Sous les hypothèses de la proposition précédente, nous avons

$$(2) \quad \int_{\partial x_h(E)} K_g dS = \int_{\partial E} k_g ds + (n_E - p_E) \pi$$

et

$$(3) \quad 2(2 - b_E) \pi = \int_{\partial x_h(E)} K_g dS + (p_E - n_E) \pi + \sigma(E),$$

où ds (resp. dS) désigne l'élément de volume de ∂E (resp. $\partial x_h(E)$), k_g (resp. K_g) sa courbure géodésique, b_E le nombre de composantes de $\partial x_h(E)$ et p_E (resp. n_E) le nombre de queues d'aronde positives (resp. négatives) portées par $\partial x_h(E)$.

La relation (3) est la formule de Gauss-Bonnet au but $x_h(E)$. La relation (2) la relie à la formule de Gauss-Bonnet à la source :

$$2\pi\chi(E) = \int_{\partial E} k_g ds + \sigma(E), \quad \text{où } \chi(E) = (2 - b_E).$$

N.B. Sauf mention explicite du contraire, dans tout le reste de cette section, les nombres seront comptés à la source \mathbb{S}^2 .

Proposition 2. Soit \mathcal{H}_h un hérisson générique de \mathbb{R}^3 et H une région de \mathbb{S}^2 telle que $x_h(H)$ soit une région hyperbolique de \mathcal{H}_h bordée par des arêtes de rebroussement. Nous avons alors

$$(4) \quad 2(2 - b_H) = n_H - p_H \quad \text{et} \quad (5) \quad \int_{\partial x_h(H)} K_g dS = \sigma(H),$$

où : (i) b_H est le nombre de composantes de $\partial x_h(H)$ et p_H (resp. n_H) le nombre de queues d'aronde positives (resp. négatives) qu'il porte ;

(ii) dS est l'élément de volume de $\partial x_h(H)$ et K_g sa courbure géodésique.

Naturellement, pour un hérisson projectif la région hyperbolique $x_h(H)$ peut être non orientable. Mais dans ce cas, nous la considérons comme une variété orientée immergée, c'est-à-dire comme le revêtement orientable à deux feuillets. La relation (4) peut alors s'écrire

$$2(1 - b_H) = n_H - p_H,$$

en comptant b_H , p_H et n_H sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Les relations (4) et (5) composent la formule de Gauss-Bonnet au but $x_h(H)$:

$$(6) \quad 2\pi\chi(H) = \int_{\partial x_h(H)} K_g dS + (n_H - p_H)\pi - \sigma(H), \quad \text{où } \chi(H) = (2 - b_H).$$

Le résultat suivant se déduit de (4) par sommation :

Corollaire 3. Si \mathcal{H}_h est un hérisson générique de \mathbb{R}^3 , alors

$$(7) \quad r_+ - r_- = \frac{p - n}{2} + 1,$$

où r_+ (resp. r_-) désigne le nombre des régions elliptiques (resp. hyperboliques) de \mathcal{H}_h et p (resp. n) le nombre de ses queues d'aronde positives (resp. négatives).

En effet, une sommation donne $2(2r_- - b) = n - p$, où b est le nombre de courbes fermées formant le lieu singulier de \mathcal{H}_h , et b vérifie bien sûr $r_- + r_+ = b + 1$.

La relation (7) se trouve déjà dans [10] : les auteurs considèrent un chemin générique de surfaces parallèles reliant \mathcal{H}_h à un hérisson convexe (pour lequel $r_+ = 1$ et $r_- = p = n = 0$) et observent que la valeur de $r_+ - r_- - (p - n)/2$ ne change pas lors d'une métamorphose générique.

La relation (4) implique que n_H et p_H ont la même parité. Comme les queues d'aronde positives sont 2 à 2 reliées par des courbes de points doubles de $x_h(H)$, elles sont nécessairement en nombre pair. Par conséquent :

Corollaire 4. Soit \mathcal{H}_h un hérisson générique de \mathbb{R}^3 . Sur le bord de toute région hyperbolique de \mathcal{H}_h , le nombre de queues d'aronde de chaque type est pair, aussi bien à la source qu'au but.

II. Preuve des résultats et compléments. Pour tout hérisson \mathcal{H}_h de \mathbb{R}^2 , l'ensemble

$$C_h = \{x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h \mid i_h(x) = 1\}$$

est une partie convexe de \mathbb{R}^2 [9] que nous appellerons l'intérieur convexe de \mathcal{H}_h .

La développée d'un hérisson plan de fonction support C^3 est nécessairement (un hérisson) d'intérieur convexe vide. Le Théorème 3 prouve plus généralement que tout hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ dont 2 droites support sont confondues (c'est le cas si la valeur moyenne de h est nulle sur $[0, 2\pi]$, et donc si h est une dérivée ou une fonction de Möbius) est d'intérieur convexe vide [9]. Nous savons que les hérissons plans d'intérieur convexe vide tournent toujours leur concavité vers l'extérieur et qu'ils présentent au moins 4 points singuliers sur S^1 (ib.). Dans le cas générique, la formule de Gauss-Bonnet nous renseigne sur le nombre de points singuliers :

Proposition 3. *Étant donné un hérisson générique $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$, considérons $(a, \alpha) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi]$ tel que $x_h : [a, a + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définisse un arc fermé simple Γ orienté dans le sens indirect (i.e. tournant toujours sa concavité vers l'extérieur). Si un tel arc existe, il vérifie*

$$n\pi = \pi + \alpha + \beta,$$

où n désigne le nombre de ses points de rebroussement dans $x_h]a, a + \alpha[$ et $\beta \in [0, 2\pi]$ son angle intérieur en $x_h(a)$ (voir la figure 3). En particulier $n \geq 2$.

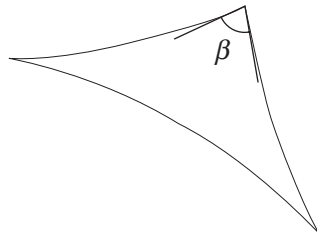


Figure 3.

Preuve. La formule de Gauss-Bonnet donne ici

$$2\pi = \int_{\partial D} k_g ds + n\pi + (\pi - \beta),$$

où ∂D est le bord orienté du compact délimité par Γ dans \mathbb{R}^2 , ds l'élément de volume de ∂D et k_g sa courbure géodésique signée. Cette dernière est positive lorsque ∂D tourne sa concavité vers l'intérieur et négative lorsqu'il la tourne vers l'extérieur (ici, c'est toujours le cas puisque Γ est un arc de hérisson orienté dans le sens indirect). Comme nous avons $ds = |R_h(\theta)| d\theta$ et $k_g(x_h(\theta)) = -|R_h(\theta)|^{-1}$, le résultat en découle immédiatement. \square

Corollaire 5. *Tout hérisson générique non convexe et non projectif $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ qui est le bord d'un disque topologique a exactement 4 points singuliers sur S^1 . Tout hérisson projectif générique $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ qui est le bord d'un disque topologique a exactement 3 points singuliers sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.*

La Proposition 3 permet aussi d'établir le Théorème 4 :

Preuve du Théorème 4. (i) \Rightarrow (ii) : Rappelons que tout hérisson projectif générique $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ est formé de $2k + 1$ points de rebroussement de 1^{ère} espèce, reliés entre eux par $2k + 1$ arcs convexes de courbure totale $< \pi$. Lorsque $k = 1$, deux quelconques des trois arcs convexes se raccordent nécessairement en un point de rebroussement de 1^{ère} espèce, et ne se rencontrent donc qu'en cette extrémité commune. Le hérisson \mathcal{H}_h est donc alors sans point multiple.

(ii) \Rightarrow (i) : C'est une conséquence directe de la Proposition 3 (cf. Corollaire 5).

(ii) \Rightarrow (iii) : C'est une conséquence immédiate de la définition de l'indice.

(iii) \Rightarrow (ii) : Notons D_u la droite support de direction normale $u \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Pour tout $u \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, considérons l'application $f_u : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow D_u$ définie par

$$f_u(u) = x_h(u) \quad \text{et} \quad \{f_u(v)\} = D_u \cap D_v \quad \text{si} \quad u \neq v$$

f_u est continue sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et localement injective sauf au voisinage des $v \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ pour lesquels \mathcal{H}_h traverse D_u en $x_h(v)$: dans ce cas, f_u change de direction en v . Compte tenu du Théorème 3, il en résulte que si $i_h \geq -2$ sur $\mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$, alors pour tout $u \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, \mathcal{H}_h traverse D_u en exactement 2 points $a_u, b_u \in D_u$, chaque point de $]a_u, b_u[$ admettant exactement 2 antécédents par f_u et les points de $D_u - [a_u, b_u]$ n'en admettant aucun. Or, au voisinage d'un point double d'un hérisson projectif dont les singularités sont génériques, cette propriété est nécessairement violée et ce quelle que soit la nature du point double (auto-intersection transverse, points de rebroussements confondus, rebroussement atteignant un arc convexe régulier en restant du côté concave ou convexe). \square

Preuve du Théorème 5. Le hérisson de fonction support $k(\theta) = \sin(3\theta)$ vérifie les relations $s_k = 3$ et $t_k^+ = t_k^- = 0$, puisqu'il s'agit d'une hypocycloïde à trois rebroussements. Le chemin de hérissons projectifs $h_t = th + (1 - t)k$ ($0 \leq t \leq 1$) peut être rendu générique, de sorte que seuls deux types d'évènements peuvent survenir : une métamorphose générique de fronts d'onde (apparition ou disparition conjointe d'un couple de rebroussements) ou une traversée d'un arc régulier par un rebroussement (comme les auto-tangences sont impossibles dans l'espace des hérissons projectifs, les auto-intersections ne peuvent apparaître ou disparaître autrement). Pour conclure, il suffit d'observer que ces évènements types ne modifient pas l'expression $s_h - 2(t_h^+ - t_h^-)$. \square

Pour clore notre étude dans \mathbb{R}^2 , notons cette autre formule de dénombrement :

Théorème 6. *Soit $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ un hérisson générique d'intérieur convexe non vide dont tous les points doubles sont réguliers. Notons s_h le nombre de rebroussements de \mathcal{H}_h et t_h^+ (resp. t_h^-) le nombre de paires $\{u, v\}$ de points réguliers distincts de $x_h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant $x_h(u) = x_h(v)$ et $R_h(u)R_h(v) > 0$ (resp. $R_h(u)R_h(v) < 0$). Nous avons alors :*

$$s_h = 2(t_h^+ - t_h^-).$$

En particulier, $s_h \leq 2t_h^+$.

Ce résultat peut se déduire par dualité projective de la formule de Fabricius-Bjerre-Halpern [3]. Il peut aussi être établi directement comme le Théorème 5 : on suppose $h > 0$

sans perte de généralité (prendre l'origine dans l'intérieur convexe, puis remplacer h par $g(\theta) = -h(\theta + \pi)$ si $h < 0$) et on rend générique (parmi les hérissons de fonctions support > 0) le chemin $h_t = h + tr$ ($0 \leq t \leq 1$), où $r \in \mathbb{R}_+^*$ est assez grand pour que \mathcal{H}_{h_1} soit régulier, et donc tel que $s_{h_1} - 2(t_{h_1}^+ - t_{h_1}^-) = 0$. La positivité des fonctions support assure l'absence d'auto-tangence.

Notre étude dans \mathbb{R}^3 repose en grande partie sur la Proposition 1 :

Preuve de la Proposition 1. La généricité de \mathcal{H}_h nous assure que sur Γ :

- (i) l'application tangente de x_h reste de rang 1 (réciproque de l'application de Weingarten, ses valeurs propres sont les rayons de courbure principaux de \mathcal{H}_h) ;
- (ii) les queues d'aronde correspondent aux points où le noyau de cette application (la direction principale associée au rayon de courbure nul) est tangent à Γ ;
- (iii) la queue d'aronde est positive (resp. négative) lorsque la ligne de courbure correspondante se situe localement dans la région hyperbolique (resp. elliptique).

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \gamma(s)$ une paramétrisation par longueur d'arc de Γ et soit $X : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ un champ de vecteurs unitaires le long de Γ , tel que : $\forall s \in I$, $X(s) \in \text{Ker}[T_{\gamma(s)}x_h]$. La courbure géodésique de $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$ peut s'écrire

$$k_g(s) = \text{dét}(\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s)) ;$$

et le calcul donne

$$k_g(s) ds - K_g(S) dS = \omega'(s) ds,$$

où S désigne une abscisse curviligne de $(x_h \circ \gamma)(s)$ sur l'arc orienté $x_h(\Gamma)$ et $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \omega(s)$ une mesure continue de l'angle orienté $(X(s), \gamma'(s))$. Compte tenu de la caractérisation des queues d'aronde de chaque type sur l'arête (cf. (ii) et (iii)), la relation (1) s'en déduit immédiatement par intégration. \square

Le Corollaire 2 en est une conséquence immédiate. La relation (3) peut aussi être établie directement par application de la formule de Gauss-Bonnet sur $x_h(E)$.

Preuve de la Proposition 2. La relation suivante résulte immédiatement de la relation (1) en tenant compte des orientations :

$$\int_{\partial H} k_g ds + \int_{\partial x_h(H)} K_g dS = (n_H - p_H) \pi.$$

Compte tenu de la formule de Gauss-Bonnet à la source H , soit

$$2(2 - b_H) \pi = \int_{\partial H} k_g ds + \sigma(H),$$

on en déduit que :

$$2(2 - b_H) \pi + \int_{\partial x_h(H)} K_g dS = (n_H - p_H) \pi + \sigma(H).$$

La Proposition 2 résulte alors de la formule de Gauss-Bonnet au but $x_h(H)$, soit

$$(6) \quad 2(2 - b_H) \pi = \int_{\partial x_h(H)} K_g dS + (n_H - p_H) \pi - \sigma(H).$$

La Proposition 2 peut aussi être établie en prouvant directement la relation (4) $2(2 - b_H) = n_H - p_H$ par application du théorème de l'indice aux feuilletages orthogonaux définis sur

H par les (images sphériques des) lignes de courbure. En effet, ce théorème assure que la caractéristique d'Euler de la région H vérifie $2\chi(H) = n_H - p_H$ car sur chaque composante Γ de ∂H , les (représentations sphériques des) queues d'aronde sont caractérisées par un contact quadratique simple avec ∂H (de l'image sphérique) d'une ligne de courbure associée au rayon de courbure qui s'annule sur Γ , les queues d'arondes positives (resp. négatives) correspondant à un contact intérieur (resp. extérieur). Pour plus de détails, se reporter à la preuve que T. Banchoff et R. Thom donnent du résultat suivant [2] : étant donné une immersion générique $X : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, la caractéristique d'Euler d'une région hyperbolique H est donnée par $2\chi(H) = n_H - p_H$, où n_H (resp. p_H) désigne le nombre de godrons de type foyer ou noeud (resp. col). La preuve de ce résultat dual est en effet identique. \square

References

- [1] V. I. ARNOLD, Critical points of smooth functions. Proc. Int. Cong. Math., Vancouver 1974, vol. 1, 19–39.
- [2] T. BANCHOFF et R. THOM, Sur les points paraboliques des surfaces : erratum et compléments. C. R. Acad. Sci. Paris **291**, 503–505 (1980).
- [3] M. BERGER et B. GOSTIAUX, Géométrie différentielle : Variétés, Courbes et Surfaces. Presses Univ. France, 1987.
- [4] G.D. CHAKERIAN et H. GROEMER, Convex bodies of constant width. Dans : Convexity and its applications, Collect. Surv., 49–96 (1983).
- [5] D. HILBERT et S. COHN-VOSSEN, Geometry and the imagination. New York 1952. Ouvrage original en allemand : Anschauliche Geometrie, Berlin 1932.
- [6] E. HEIL, Existenz eines 6-Normalenpunktes in einem konvexen Körper. Arch. Math. **32**, 412–416 (1979).
- [7] E. HEIL, Korrektur zu: "Existenz eines 6-Normalenpunktes in einem konvexen Körper". Arch. Math. **33**, 496 (1979–80).
- [8] Y. MARTINEZ-MAURE, Sur les hérissons projectifs (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss). Bull. Sci. Math. **121**, 585–601 (1997).
- [9] Y. MARTINEZ-MAURE, Indice d'un hérisson : étude et applications. Publ. Mat. **44**, 237–255 (2000).
- [10] R. LANGEVIN, G. LEVITT et H. ROSENBERG, Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss). Singularities. Banach Center Publ. **20**, 245–253, Warsaw 1988.

Eingegangen am 4. 12. 2000

Anschrift des Autors:

Yves Martinez-Maure
1, rue Auguste Perret
F-92500 Rueil-Malmaison
France
martinez@esiea.fr