

# Table des matières

Terminale|seeRécurtivité  
 Dynamique|seeProgrammation  
 DFE|seeDéveloppement  
 DFC|seeDéveloppement  
 Farey|seeFarey-Haros  
 Haros|seeFarey-Haros  
 Stern|seeArbre de  
 Stern-Brocot  
 Brocot|seeArbre de  
 Stern-Brocot  
 Carmichael|seeNombre de  
 Carmichael  
 GLC|seeGénérateur linéaire  
 congruentiel  
 Nan|seeNot a Number

<b>1</b>	<b>Voyage dans l'univers des hérissons</b>	<b>3</b>
1.1	La genèse des hérissons . . . . .	4
1.2	Comment mesurer un hérisson plan? . . . . .	8
1.3	Construction de hérissons fractals . . . . .	9
1.4	Modélisation de fronts d'onde et opérations sur les hérissons . . . . .	10
1.5	La surface de Boy et les modèles hérissons du plan projectif réel . . . . .	12
1.6	Surfaces minimales: quand les hérissons font la bulle . . . . .	17
1.7	Compléments et problèmes ouverts . . . . .	19
1.8	Les codes Mathematica de cet atelier . . . . .	23
1.9	Bibliographie . . . . .	27



# Atelier 1

## Voyage dans l'univers des hérissons

Auteur : Y. Martinez-Maure

`martinez@esiea.fr`

### Sommaire

---

1.1	La genèse des hérissons . . . . .	4
1.2	Comment mesurer un hérisson plan? . . . . .	8
1.3	Construction de hérissons fractals . . . . .	9
1.4	Modélisation de fronts d'onde et opérations sur les hérissons . . . . .	10
1.5	La surface de Boy et les modèles hérissons du plan projectif réel . . . . .	12
1.6	Surfaces minimales : quand les hérissons font la bulle . . . . .	17
1.7	Compléments et problèmes ouverts . . . . .	19
1.8	Les codes Mathematica de cet atelier . . . . .	23
1.9	Bibliographie . . . . .	27

---

Courbe! convexe  
 Fonction! support  
 Droite support  
 Enveloppe

*Le renard sait beaucoup de choses. Mais le hérisson connaît une grande chose.*  
 — Archiloque, poète grec cité dans [25]

La théorie des hérissons est une extension naturelle de celle des corps convexes. Elle s'étend aujourd'hui à de nombreux sujets : convexité, surfaces minimales, hypersurfaces algébriques, fronts d'onde, modèles du plan projectif, fractals, etc. Cet atelier vous propose d'en découvrir les fondements dans un cadre relativement élémentaire. Les nombreux exemples et les illustrations permettront au lecteur débutant d'appréhender l'essentiel en omettant les aspects les plus théoriques. De nombreux exercices pratiques (et/ou) théoriques seront proposés. Enfin, divers problèmes ouverts seront soumis à la sagacité des plus audacieux. Les enseignants de mathématiques y trouveront une source de problèmes de géométrie inédits.

Les sections 5, 6 et 7 ainsi que la sous-section 1b nécessitent une culture mathématique plus solide et peuvent être omis en première lecture. L'abondante bibliographie permettra au lecteur d'approfondir les sujets de son choix.

## 1.1 La genèse des hérissons

### a. Le cas des hérissons plans

Soit  $\mathbb{S}^1$  le cercle unité du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Nous dirons que  $\mathcal{C}$  est une courbe fermée simple de  $\mathbb{R}^2$  si  $\mathcal{C}$  est l'image de  $\mathbb{S}^1$  par une application continue et injective de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Une courbe fermée simple bordant une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$  est appelée *courbe convexe*. On rappelle qu'une partie  $A \subset \mathbb{R}^n$  est dite convexe si elle vérifie :

$$\forall (u, v) \in A^2, [u, v] = \{tu + (1-t)v \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Une courbe convexe de  $\mathbb{R}^2$  est dite strictement convexe si elle ne contient aucun segment  $[u, v]$ , où  $u \neq v$ .

La *fonction support* d'une courbe convexe  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  est définie sur  $\mathbb{S}^1$  par

$$h(u) = \sup(\{\langle u, v \rangle \mid v \in \mathcal{C}\}),$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire standard. Elle détermine  $\mathcal{C}$  comme frontière du convexe

$$K = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^1} P(u),$$

où  $P(u)$  est le demi-plan fermé d'inéquation  $\langle u, v \rangle \leq h(u)$ . Pour tout  $u \in \mathbb{S}^1$ , la droite d'équation  $\langle u, v \rangle = h(u)$  est appelée *droite support* de  $\mathcal{C}$  dans la direction  $u$ . Notons que  $h(u)$  représente la distance signée de cette droite à l'origine (elle est  $< 0$  si  $u$  pointe dans le demi-espace contenant l'origine).

Si la courbe  $\mathcal{C}$  est strictement convexe, sa fonction support  $h(\theta)$  définie par  $h(\theta) = h(\cos \theta, \sin \theta)$ , est de classe  $C^1$  sur  $I = [0, 2\pi]$  (cf. [28], page 107). La courbe  $\mathcal{C}$  peut alors se voir comme l'*enveloppe* de la famille de droites  $(D_\theta)_{\theta \in I}$ , où  $D_\theta$  a pour équation

$$x \cos \theta + y \sin \theta = h(\theta). \quad (1.1)$$

Cette enveloppe sera notée  $\mathcal{H}_h$ . La dérivation de (1.1) par rapport à  $\theta$  nous donne

$$-x \sin \theta + y \cos \theta = h'(\theta), \quad (1.2)$$

et il ressort de (1.1) et (1.2) que  $\mathcal{C}$  peut être paramétrée par :

$$\begin{cases} x = h(\theta) \cos \theta - h'(\theta) \sin \theta \\ y = h(\theta) \sin \theta + h'(\theta) \cos \theta. \end{cases}$$

Lorsque  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^2$  quelconque,  $h$  n'est pas nécessairement la fonction support d'une courbe convexe. En revanche,  $h$  peut encore se voir comme la fonction support de l'enveloppe  $\mathcal{H}_h$ . Le calcul précédent nous donne la paramétrisation naturelle de cette enveloppe que nous appellerons désormais le *hérisson* de fonction support  $h$  :

$$x_h : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto x_h(\theta) = h(\theta)u(\theta) + h'(\theta)u'(\theta).$$

Si  $\mathcal{H}_h$  admet une tangente  $T$  en  $x_h(\theta)$ , alors  $T = D_\theta : u(\theta)$  est normal à  $T$  et  $h(\theta)$  est la distance signée de  $T$  à l'origine. Nous avons :

$$\forall \theta \in I, x'_h(\theta) = (h + h'')(\theta)u'(\theta).$$

Par conséquent, le hérisson  $\mathcal{H}_h$  est régulier (*i.e.*  $x'_h(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in I$ ), si et seulement si la fonction  $R_h = h + h''$  (qui s'identifie au rayon de courbure) ne s'annule pas sur  $I$ . Les hérissons réguliers sont donc des courbes strictement convexes — voir FIG. 1.1(a). Un hérisson qui n'est pas trop singulier (*i.e.* admettant une tangente en chaque point) est une courbe admettant exactement une tangente orientée dans chaque direction — voir FIG. 1.1(b).

La distance signée entre les droites supports  $D_\theta$  et  $D_{\theta+\pi}$  est appelée *largeur* de  $\mathcal{H}_h$  dans la direction  $u(\theta)$ . Un hérisson  $\mathcal{H}_h$  est dit *projectif* si sa largeur est nulle dans toutes les directions, c'est-à-dire si  $h(\theta + \pi) = -h(\theta)$  pour tout  $\theta \in I$ . Un hérisson projectif pas trop singulier est une courbe admettant exactement une tangente non orientée dans chaque direction — voir FIG. 1.1(c).

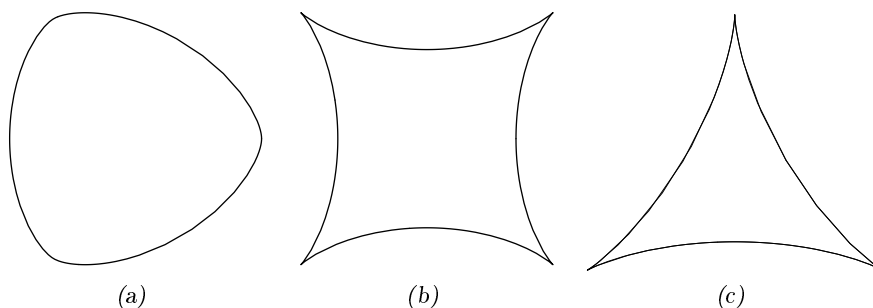


FIG. 1.1 – Trois exemples de hérissons

Hérisson  
Hérisson! projectif  
Projectif! Hérisson  
Largeur! d'un hérisson

Corps! convexe  
 Corps! strictement convexe  
 Fonction! support  
 Fonction! d'appui  
 Enveloppe

CONSTRUCTION DE HÉRISONS PLANS

`In[1] := h[θ_] := Sin[5θ]`

définit la fonction  $h$ .

`In[2] := ParametricPlot[{h[θ] Cos[θ] - h'[θ] Sin[θ],  
 h[θ] Sin[θ] + h'[θ] Cos[θ]}, {θ, 0, 2π},  
 AspectRatio -> Automatic, Axes -> True]`

trace le hérisson  $\mathcal{H}_h$   
 sans le déformer ni  
 représenter les axes.

**Exercice** Déterminer la fonction support de l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .  
 (Réponse : elle est donnée par  $h(\theta) = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$ ).

### b. Cas général

Un sous-ensemble non vide, compact et convexe de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est appelé un *corps convexe*. Un tel corps est dit strictement convexe si sa frontière ne contient aucun segment  $[u, v]$ , où  $u \neq v$ . La figure 1.2(a) représente un corps convexe et la figure 1.2(b) un *corps strictement convexe*. Nous renvoyons le lecteur intéressé par l'étude des corps convexes à l'ouvrage de R. Schneider [28].



FIG. 1.2 – Deux exemples de corps convexes

à tout corps convexe  $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est associée une *fonction support* (ou fonction d'appui)  $h_K$ , définie sur la sphère unité  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  par

$$h_K(u) = \sup (\{ \langle u, v \rangle \mid v \in K \} ).$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire standard.

Le corps  $K$  est déterminé par sa fonction support  $h_K$  :

$$K = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^n} E(u),$$

où  $E(u)$  est le demi-espace fermé d'inéquation  $\langle u, v \rangle \leq h_K(u)$ .

Lorsque  $K$  est strictement convexe, sa fonction support  $h = h_K$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{S}^n$  (cf. [28] cor. 1.7.3.). Sa frontière  $\partial K$  peut alors être vue comme l'*enveloppe* de la famille d'hyperplans  $(H_u)_{u \in \mathbb{S}^n}$ , où  $H_u$  a pour équation

$$\langle x, u \rangle = h(u). \quad (1.3)$$

Cette enveloppe sera notée  $\mathcal{H}_h$ . La différentiation de (1.3) par rapport à  $u$  donne

$$\langle x, \cdot \rangle = dh_u(\cdot), \quad (1.4)$$

où  $dh_u$  désigne la différentielle de  $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en  $u$ .

Il ressort de (1.3) et (1.4) que la frontière  $\partial K$  peut être paramétrée par

$$x_h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, u \mapsto h(u)u + (\nabla_{\mathbb{S}^n} h)(u),$$

où  $(\nabla_{\mathbb{S}^n} h)(u)$  désigne le gradient de  $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en  $u$ .

Pour une expression plus commode de  $x_h$ , on étend  $h = h_K$  à tout l'espace

$$\forall u \in \mathbb{S}^n, x_h(u) = \nabla h(u),$$

où  $\nabla h(u)$  désigne le gradient de  $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \sup(\{\langle u, v \rangle \mid v \in K\})$  en  $u$ .

Lorsque  $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^2$  quelconque,  $h$  n'est pas nécessairement la fonction support d'un corps convexe. En revanche,  $h$  peut encore se voir comme la fonction support de l'enveloppe  $\mathcal{H}_h$ . Le calcul précédent nous donne la paramétrisation naturelle de  $\mathcal{H}_h$  que nous appellerons désormais le *hérisson* de fonction support  $h$ :

$$\begin{aligned} x_h : \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ u &\mapsto h(u)u + (\nabla_{\mathbb{S}^n} h)(u). \end{aligned}$$

On a bien sûr

$$\forall u \in \mathbb{S}^n, x_h(u) = \nabla \varphi(u),$$

où  $\varphi$  désigne l'extension positivement 1-homogène de  $h$  à  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  (i.e. la fonction définie par  $\varphi(u) = \|u\| h\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$  pour tout  $u \neq 0$ ).

Notons que toute partie régulière de  $\mathcal{H}_h$  admet une orientation transverse pour laquelle le vecteur normal en  $x_h(u)$  n'est autre que  $u$ . L'application  $x_h$  peut donc s'interpréter comme la réciproque de l'application de Gauss.

Considérons la différentielle seconde de  $\varphi$  en  $u \in \mathbb{S}^n$  comme une forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Elle vérifie alors

$$d^2\varphi_u(u, u) = 0 \text{ et } d^2\varphi_u(v, v) = \langle v, T_u x_h(v) \rangle \text{ pour tout } v \in T_u \mathbb{S}^n,$$

où  $T_u x_h$  est l'application tangente à  $x_h$  en  $u$ . Ses valeurs propres sont donc 0 et les rayons de courbure principaux de  $\mathcal{H}_h$  en  $u$ . Pour  $n = 2$ , la moyenne  $R_{(1, h)}$  (resp. le produit  $R_h$ ) des rayons de courbure principaux peut donc s'écrire

$$R_{(1, h)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \varphi_{ii} \quad \left( \text{resp. } R_h = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} (\varphi_{ii}\varphi_{jj} - (\varphi_{ij})^2) \right),$$

où les  $\varphi_{ij}$  désignent les dérivées partielles d'ordre 2 de  $\varphi$ . Bien sûr,  $u$  est considéré ici comme le vecteur normal unitaire en  $x_h(u)$ . La fonction  $R_h$  est appelée la *fonction de courbure de  $\mathcal{H}_h$* : elle s'identifie à l'inverse de la courbure de Gauss. On peut noter qu'elle est définie sur toute la sphère et qu'elle s'annule exactement sur le lieu singulier.

Un hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est dit *projectif* si sa fonction support vérifie  $h(-u) = -h(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{S}^n$ . Un tel hérisson est nécessairement singulier. Cela tient au fait qu'il admet au plus un hyperplan tangent non orienté orthogonal à une droite vectorielle donnée (les hyperplans support  $H_{-u}$  et  $H_u$  sont confondus quel que soit  $u \in \mathbb{S}^n$ ).

Fonction! de courbure  
Hérisson! projectif  
Projectif! Hérisson

Fonctions Mathematica!  
 \textttParametricPlot3D  
 Longueur! d'un hérisson  
 Hérisson! longueur d'un  
 Aire

CONSTRUCTION DE HÉRISONS DANS  $\mathbb{R}^3$

$In[1] := h[x_, y_, z_] := \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$

définit la fonction  
 (positivement 1-  
 homogène)  $h$ .

$In[2] := x_h[x_, y_, z_] :=$

$\{\partial_x h[x, y, z], \partial_y h[x, y, z], \partial_z h[x, y, z]\}$

$Simplify[x_h[x, y, z]/.$

$\{x \rightarrow \text{Cos}[u] \text{Cos}[v], y \rightarrow \text{Sin}[u] \text{Cos}[v], z \rightarrow \text{Sin}[v]\}$

$\text{ParametricPlot3D}[\%, \{u, 0, 2\pi\}, \{v, 0, \pi\},$

$\text{Axes} \rightarrow \text{True}, \text{Boxed} \rightarrow \text{True},$

$\text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}]$

trace le hérisson  
 sans déformation  
 ni représentation  
 du cadre ou des  
 axes.

## 1.2 Comment mesurer un hérisson plan ?

Soit  $\mathcal{H}_h$  un hérisson convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Le qualificatif « convexe » signifie ici que  $\mathcal{H}_h$  est une courbe convexe. La *longueur* de  $\mathcal{H}_h$  est donnée (au signe près) par

$$l(h) = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta. \quad (1.5)$$

**Exercice** Établir ce résultat en observant que  $R_h = h + h''$  ne change pas de signe pour un hérisson convexe. Rappelons que si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une paramétrisation d'un arc de classe  $C^1$ , alors cet arc a pour longueur :

$$L = \int_a^b \|\gamma'(\theta)\| d\theta.$$

L'aire de  $\mathcal{H}_h$  (i.e. celle du domaine convexe bordé par  $\mathcal{H}_h$ ) est donnée par :

$$a(h) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta)(h + h'')(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h^2 - (h')^2)(\theta) d\theta. \quad (1.6)$$

**Exercice** Utiliser la formule de Green-Riemann pour déduire ce résultat de la relation  $a(h) = \iint_K dx dy$ , où  $K$  désigne le corps convexe bordé par  $\mathcal{H}_h$ .

Pour un hérisson quelconque, les relations (1.5) et (1.6) définissent encore une longueur et une aire algébriques [21]. Pour  $h(\theta) = \cos(2\theta)$ , l'aire  $a(h)$ , qui vaut  $-3\pi/2$ , s'écrit  $-aire(\mathcal{D}_h)$ , où  $\mathcal{D}_h$  désigne le domaine bordé par  $\mathcal{H}_h$  — voir FIG. 1.1(b) page 5. Le signe moins s'explique par le fait que  $x_h(\theta)$  décrit  $\mathcal{H}_h$  dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque  $\theta$  décrit le segment  $[0, 2\pi]$  de 0 à  $2\pi$ . Pour  $h(\theta) = \sin(3\theta)$ , l'aire  $a(h)$  vaut  $-4\pi$  et s'écrit  $-2aire(\mathcal{D}_h)$ , où  $\mathcal{D}_h$  désigne le domaine bordé par  $\mathcal{H}_h$  — voir FIG. 1.1(c) page 5. Le facteur  $-2$  s'explique par le fait que  $x_h(\theta)$  parcourt deux fois  $\mathcal{H}_h$  dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque  $\theta$  décrit le segment  $[0, 2\pi]$  de 0 à  $2\pi$ .



**Exercice**

**1. Prouver** que tout hérisson projectif non trivial (i.e. non réduit à un point)  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  est d'aire algébrique strictement négative. Indication : développer sa fonction support  $h(\theta)$  en série de Fourier.

**2. Prouver** que tout hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  vérifie l'inégalité, dite isopérimétrique,  $4\pi a(h) \leq l(h)^2$ .

**3. Prouver** que  $N:h \mapsto \sqrt{-a(h)}$  est une norme associée à un produit scalaire sur l'espace vectoriel des hérissons projectifs plans définis à une translation près.

La longueur absolue du hérisson  $\mathcal{H}_h$  est donnée par :

$$L(h) = \int_0^{2\pi} |(h + h'')(\theta)| d\theta.$$

CALCUL DE LA LONGUEUR ET DE L'AIRES

Le triplet  $(l(h), L(h), a(h))$  se calcule directement comme suit :

$$\text{In}[1] := \left\{ \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta, \int_0^{2\pi} |(h + h'')(\theta)| d\theta, \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta)(h + h'')(\theta) d\theta \right\}$$

Pour les hérissons  $h(\theta) = \cos(2\theta)$  et  $h(\theta) = \sin(3\theta)$  — voir FIG. 1.1(b) et FIG. 1.1(c) page 5 — on obtient respectivement :

$$\text{Out}[1] := \{0, 12, -3\pi/2\}$$

$$\text{Out}[1] := \{0, 32, -4\pi\}$$

### 1.3 Construction de hérissons fractals

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des hérissons de fonction support  $C^2$ , mais il est clair que toute fonction continûment différentiable  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  définit une courbe fermée :

$$x_h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2, u(\theta) \mapsto x_h(\theta) = h(\theta)u(\theta) + h'(\theta)u'(\theta).$$

Cette courbe sera encore appelée *hérisson* de fonction support  $h$ . Dans ce cadre étendu, on rencontre de nombreuses courbes très irrégulières et même des courbes fractales ! Nos exemples de hérissons fractals sont basés sur ce fameux théorème de K. Weierstrass qui stupéfia la communauté mathématique du XIX<sup>e</sup> siècle. Il énonçait l'existence d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  qui n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 1.3.1 (K. Weierstrass, 1872).** Soit  $f$  une fonction réelle de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

où  $a$  est un nombre réel de l'intervalle  $]0, 1[$  et  $b$  un nombre naturel impair tel que  $ab > 1 + 3\pi/2$ . La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  mais elle n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{R}$ .

Le lecteur en déduira aisément le corollaire suivant :

**Corollaire 2.2.** Soit  $h$  une fonction réelle de la forme

$$h(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} \sin(\beta^n \theta),$$

Longueur! d'un hérisson  
Longueur! absolue d'un  
hérisson  
Hérisson! longueur d'un  
Hérisson  
Hérisson! fractal

où  $\beta$  est un nombre naturel impair et  $\alpha$  un nombre réel vérifiant  $\alpha > \beta$  et  $\beta^2 > \alpha(1 + 3\pi/2)$ . La fonction  $h$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  mais sa dérivée n'est continue en aucun point de  $\mathbb{R}$ .

Une telle fonction définit un hérisson fractal :

**Théorème 1.3.2 ([14]).** Soit  $h$  la fonction réelle considérée dans le corollaire précédent. Le hérisson projectif  $\mathcal{H}_h$  est une courbe fractale. Plus précisément :

- (i)  $\mathcal{H}_h$  est une courbe fermée qui n'est différentiable nulle part ;
- (ii)  $\mathcal{H}_h$  est une courbe de longueur infinie.

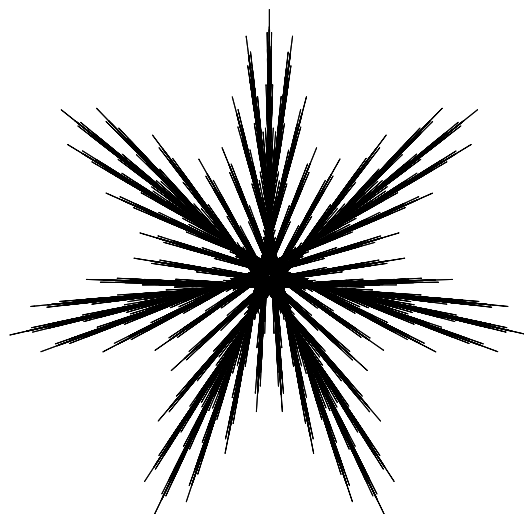


FIG. 1.3 – Le hérisson fractal de fonction support  $h(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{8^n} \sin(7^n \theta)$

Soit  $(h_n)$  la suite des sommes partielles de  $\sum \frac{1}{8^n} \sin(7^n \theta)$ . Le passage de  $\mathcal{H}_{h_n}$  à  $\mathcal{H}_{h_{n+1}}$  présente quelques similitudes avec la formation de la courbe de von Koch – voir l'atelier ???. On peut en particulier observer l'apparition de « nouvelles » singularités. Mais dans le cas présent — voir FIG. 1.3) — il apparaît en outre de « nouvelles » auto-intersections et l'ensemble de la figure se trouve transformé. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les fractals à l'ouvrage de H. O. Peitgen, H. Jürgens et D. Saupe [26] — voir aussi l'atelier ???.

## 1.4 Modélisation de fronts d'onde et opérations sur les hérissons

L'ensemble des hérissons parallèles à un hérisson donné (par exemple, à un hérisson convexe) modélise l'évolution d'un front d'onde — voir FIG. 1.4 page 12 —. Prenons un hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Pour tout nombre réel  $r$ , le hérisson  $\mathcal{H}_{h+r}$  est

dit *hérisson parallèle* à  $\mathcal{H}_h$  à une distance  $r$ . En effet,  $x_{h+r}(u)$  est déduit de  $x_h(u)$  par une translation de  $r$  unités le long de la normale orientée

$$\forall u \in \mathbb{S}^n, x_{h+r}(u) = x_h(u) + r u,$$

(on suppose la normale dirigée par  $u$ ). Les hérissons parallèles  $\mathcal{H}_{h+r}$  modélisent l'évolution d'un front d'onde. Si le hérisson « de départ »  $\mathcal{H}_h$  est convexe, les fronts d'onde « extérieurs » resteront convexes mais une partie des fronts d'onde « intérieurs » présenteront des singularités. La figure 1.4 représente l'évolution d'un front d'onde « partant » d'une ellipse et se propageant « vers l'intérieur ».

Noter que le hérisson parallèle  $\mathcal{H}_{h+r}$  peut se concevoir comme la somme du hérisson  $\mathcal{H}_h$  et de la sphère de centre l'origine et de rayon  $|r|$  (orientée vers l'intérieur ou vers l'extérieur suivant que  $r$  est  $< 0$  ou  $> 0$ ). La *somme de deux hérissons*  $\mathcal{H}_f$  et  $\mathcal{H}_g$  est donnée par celle de leurs fonctions support :  $\mathcal{H}_f + \mathcal{H}_g = \mathcal{H}_{f+g}$ . Géométriquement, cela revient à sommer « suivant les normales orientées » :

$$\forall u \in \mathbb{S}^n, x_{f+g}(u) = x_f(u) + x_g(u).$$

---

### Exercice

**1. Soit  $\mathcal{H}_h$  un hérisson quelconque de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que, pour tout nombre réel  $r$  assez grand, les hérissons parallèles  $\mathcal{H}_{h+r}$  et  $\mathcal{H}_{h-r}$  sont des courbes convexes.**

**2. Quelles sont les singularités génériques des hérissons plans ? Un hérisson plan peut-il admettre un point de rebroussement de deuxième espèce ?**

L'ensemble  $\mathcal{K}^{n+1}$  des corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$  peut être muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire :

- (i)  $\forall (K, L) \in (\mathcal{K}^{n+1})^2, K + L = \{u + v \mid u \in K, v \in L\}$  ;
- (ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall K \in \mathcal{K}^{n+1}, \lambda K = \{\lambda u \mid u \in K\}$  .

---

**Exercice** Vérifier que les ensembles ainsi définis sont bien des corps convexes.

On observe que ces deux lois ne font pas de  $\mathcal{K}^{n+1}$  un espace vectoriel. En effet, il est clairement impossible de définir une soustraction dans  $\mathcal{K}^{n+1}$  qui soit l'opération inverse de l'addition. En revanche, les hérissons de  $\mathbb{R}^{n+1}$  forment un espace vectoriel dans lequel l'ensemble des corps convexes de fonctions support  $C^2$  est un cône convexe. Il est donc toujours possible de soustraire de tels corps convexes à condition de considérer le résultat de l'opération comme un hérisson.

---

**Exercice** Représenter des différences de corps convexes plans.

Le front d'onde — voir FIG. 1.4 page suivante — se propage vers l'intérieur de l'ellipse dont il est issu : des points de rebroussement apparaissent — voir FIG. 1.4(a) page suivante. Puis, le front d'onde se « retourne » et redevient convexe — voir FIG. 1.4(b) page suivante. Le dernier plan — FIG. 1.4(c) — représente l'ensemble du mouvement.

Surface! non orientable  
Plan projectif! réel

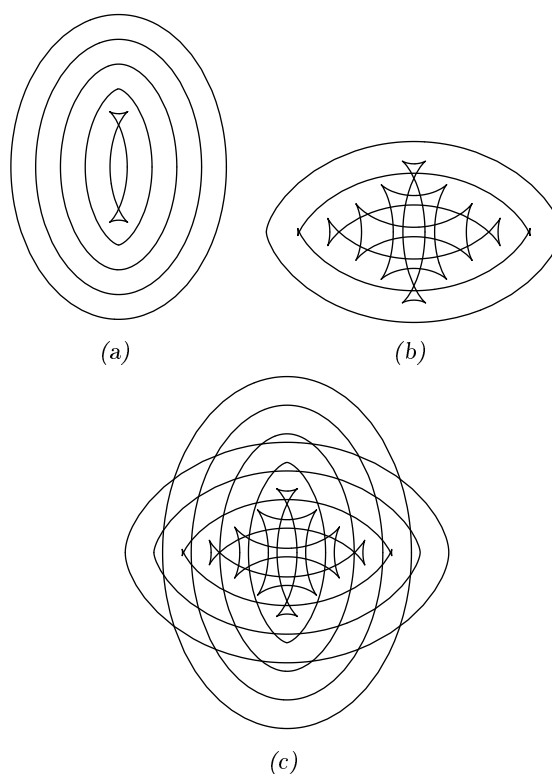


FIG. 1.4 – Évolution d'un front d'onde

## 1.5 La surface de Boy et les modèles hérissons du plan projectif réel

La célèbre *bande de Möbius* est obtenue en recollant les deux bouts d'un ruban de papier après lui avoir fait subir une torsion d'un demi-tour. Comme chacun peut en faire l'expérience, il s'agit d'une *surface non orientable* (*i.e.* à une seule face: essayez donc de colorier différemment ce qui vous apparaît comme des faces distinctes) bordée par une seule courbe (si vous tentez de la découper en son milieu dans le sens de la longueur, vous n'obtiendrez qu'un seul morceau). La paramétrisation suivante — voir la figure 1.5 — nous a permis d'en obtenir une représentation :

$$X : [0,1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, t) \longmapsto \left( \cos(2t) \left( 1 + \frac{r}{3} \cos(t) \right), \sin(2t) \left( 1 + \frac{r}{3} \cos(t) \right), \frac{r}{3} \sin(t) \right).$$

On peut se représenter cette surface sous la forme d'un carré centré à l'origine, dans lequel deux côtés opposés sont recollés abstraitement en identifiant chaque point  $p$  à son opposé  $-p$ . Si l'on recolle de la même façon les deux autres côtés du carré, on obtient une surface fermée (*i.e.* compacte et sans bord) non orientable. Cette surface est notée  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  et appelée *plan projectif réel*. Rappelons que la re-

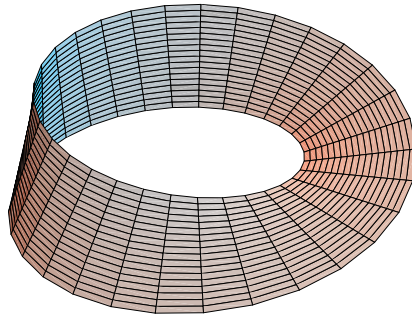


FIG. 1.5 – La bande de Möbius

Bonnet croisé  
Surface romaine de Steiner  
Axe (de symétrie ternaire)

présentation dans  $\mathbb{R}^3$  d'une surface fermée non orientable admet nécessairement des auto-intersections [11]. Les premiers modèles connus du plan projectif réel dans  $\mathbb{R}^3$  admettaient en outre des singularités. Il s'agissait principalement du *bonnet croisé* — voir FIG. 1.15 page 27 — et de la *surface romaine de Steiner* — voir FIG. 1.6. Cette dernière admet un *axe de symétrie ternaire* (i.e. elle est globalement invariante par une rotation d'angle  $2\pi/3$  autour d'un axe) et ses seules singularités sont les extrémités de trois courbes de points doubles qui se coupent en un point triple de l'axe de symétrie. La figure 1.6 représente la surface romaine de Steiner, paramétrée par :

$$Y : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (xy, yz, zx).$$

Le plan projectif  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  peut se définir comme l'espace des directions de droites de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire comme la sphère  $\mathbb{S}^2$  quotientée par l'antipodie puisque toute droite vectorielle coupe  $\mathbb{S}^2$  en deux points diamétralement opposés. Comme  $Y$  passe au quotient, la surface romaine de Steiner définit bien un modèle de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

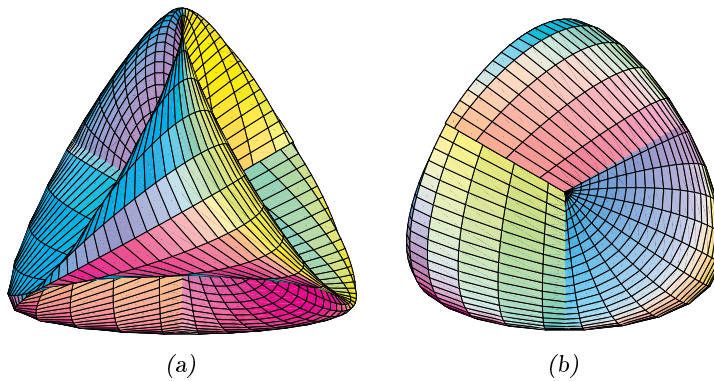


FIG. 1.6 – La surface romaine de Steiner

W. Boy a construit en 1901 un modèle non singulier de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  en réponse à D. Hilbert qui s'interrogeait sur l'existence d'un tel modèle. Ce modèle est désormais

Surface de Boy

connu sous le nom de *surface de Boy*. Plus récemment, François Apéry [1] en a obtenu une représentation paramétrique polynomiale

$$P : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (P_1(x, y, z), P_2(x, y, z), P_3(x, y, z)),$$

où :

$$\begin{cases} P_1(x, y, z) = \frac{1}{2} [(2x^2 - y^2 - z^2) + 2yz(y^2 - z^2) + zx(x^2 - z^2) + xy(y^2 - x^2)] \\ P_2(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{2} [(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2) + xy(y^2 - x^2)] \\ P_3(x, y, z) = (x + y + z) [(x + y + z)^3] + 4(y - x)(z - y)(x - z). \end{cases}$$

Le lecteur intéressé trouvera une étude détaillée de ces surfaces dans l'ouvrage de F. Apéry [2]. La figure 1.7 est construite à l'aide de cette paramétrisation. Comme la surface romaine de Steiner, la surface de Boy admet un axe de symétrie ternaire.

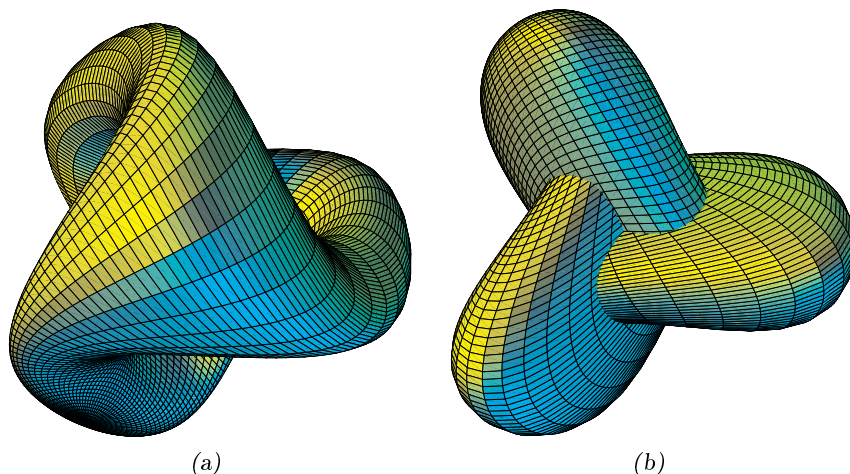


FIG. 1.7 – La surface de Boy

En 1932, D. Hilbert et S. Cohn-Vossen s'interrogeaient sur la distribution des normales dans ce modèle du plan projectif réel : « *Unfortunately, the way in which (the spherical image) is distributed over the sphere has not been studied* » ([8], p. 320). Les hérissons projectifs de  $\mathbb{R}^3$  fournissent des modèles du plan projectif réel pour lesquels l'application de Gauss est une bijection (ici, l'application de Gauss associe à un point de la surface la direction normale en ce point). En effet, un hérisson projectif de  $\mathbb{R}^3$  admet par définition un unique plan support non orienté orthogonal à une droite vectorielle donnée. Pour qu'un tel hérisson  $\mathcal{H}_h$  admette un axe de symétrie ternaire, il suffit que sa fonction support

$$h : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto h(x, y, z)$$

soit la restriction à  $\mathbb{S}^2$  d'une fonction symétrique sur  $\mathbb{R}^3$  (l'axe de symétrie est alors dirigé par le vecteur  $(1, 1, 1)$ ) ou qu'elle soit de la forme

$$h(x, y, z) = \mathbf{F}(x(x^2 - 3y^2), y(y^2 - 3x^2), z),$$

où  $\mathbf{F}$  est une fonction de 3 variables réelles (l'axe de symétrie est alors l'axe  $Oz$ ). L'auteur a obtenu ainsi une *version hérisson de la surface romaine de Steiner* [19] le hérisson défini par

$$h(x, y, z) = 2z^3 + x(x^2 - 3y^2)$$

— voir FIG. 1.8. Mais vous pourrez *construire vous-même vos modèles du plan projectif* en appliquant cette recette. Prenez soin toutefois de choisir des hérissons projectifs pas trop singuliers : votre paramétrisation  $x_h$  doit être localement injective sauf au voisinage d'un nombre fini de points. Ce n'est évidemment pas le cas pour le « *chapeau chinois* » — voir FIG. 1.9 page suivante — de fonction support  $h(x, y, z) = z^3$  : ici,  $x_h$  est constante sur l'équateur de  $\mathbb{S}^2$  (i.e. sur la section de  $\mathbb{S}^2$  par le plan  $z = 0$ ) qui correspond à une singularité conique (le sommet du chapeau). La figure 1.10 représente un autre modèle hérisson du plan projectif réel : le hérisson défini par  $h(x, y, z) = 4z^3 + 2x(x^2 - 3y^2) + 3yz^2(y^2 - 3x^2)$ .

Surface! romaine de Steiner!  
version hérisson  
Chapeau chinois  
Arête de rebroussement  
Queue d'aronde

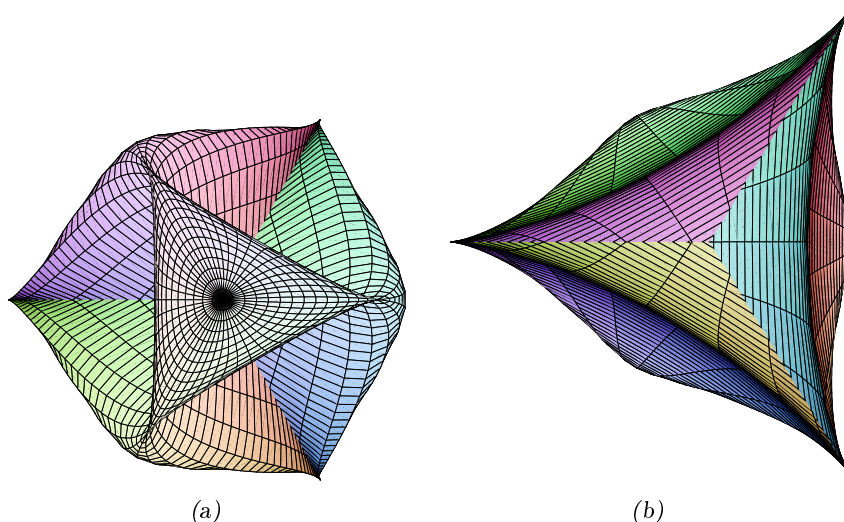
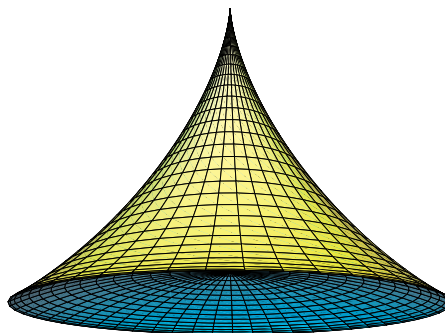
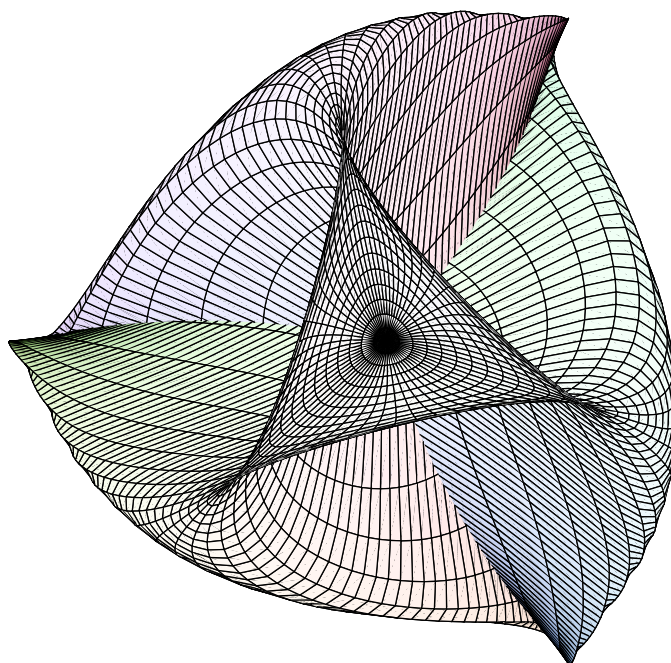


FIG. 1.8 – Deux vues d'une version hérisson de la surface romaine de Steiner

Voici en conclusion un fameux problème ouvert soulevé pour la première fois dans [13] :

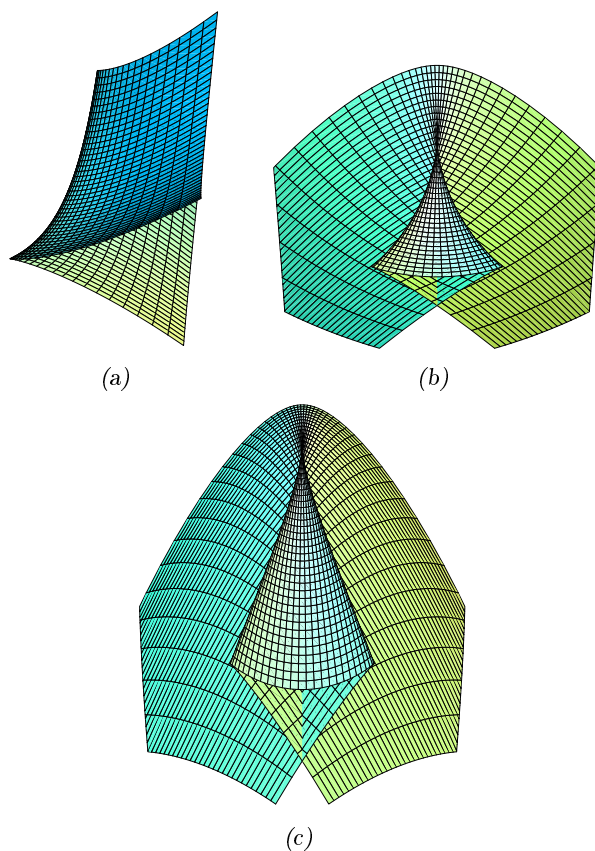
**Problème (ouvert).** *Existe-t-il un hérisson projectif (i.e. un modèle hérisson du plan projectif réel) dont le lieu singulier est réduit à une (ou plusieurs) arête(s) de rebroussement immergée(s) ?*

Les singularités génériques des hérissons de  $\mathbb{R}^3$  sont les *arêtes de rebroussement* et les *queues d'aronde* [19]. Les arêtes de rebroussement séparent les régions courbées positivement des régions courbées négativement. Les queues d'aronde — voir FIG. 1.11 page 17 — sont portées par les arêtes de rebroussement : en une telle singularité, l'arête de rebroussement n'est plus immergée mais présente elle-même un rebroussement. On distingue deux types de queues d'aronde suivant

FIG. 1.9 – *Le chapeau chinois*FIG. 1.10 – *Un modèle hérisson du plan projectif réel*

que la « queue » est courbée positivement ou négativement — voir FIG. 1.11(c) page ci-contre et FIG. 1.11(b) page suivante. Les travaux d'Arnold [3] permettent de classifier les singularités génériques des hérissons de  $\mathbb{R}^{n+1}$  pour tout  $n \leq 5$ , en considérant les hérissons  $x_h$  comme des applications de Legendre [19].



FIG. 1.11 – Les singularités génériques des hérissons de  $\mathbb{R}^3$ 

## 1.6 Surfaces minimales : quand les hérissons font la bulle

Prenez un fil de fer et donnez-lui la forme d'une courbe fermée simple et lisse. Plongez ensuite ce fil de fer dans un bain d'eau savonneuse. à sa sortie, il bordera une pellicule de savon qui se rétractera jusqu'à atteindre une position d'équilibre. En effet, la pellicule de savon bouge pour diminuer son énergie de tension superficielle et s'immobilise lorsque les forces s'exerçant sur elle se sont équilibrées : l'énergie a alors atteint un minimum local. Le calcul des variations nous apprend que les minima locaux de l'énergie correspondent à ceux de l'aire : en position d'équilibre, la bulle de savon prend la forme d'une surface qui réalise un minimum local de l'aire parmi les surfaces de même bord qu'elle.

**Problème (intuitif).** *Existe-t-il des pellicules de savon non orientables? (Indication : considérer un fil de fer bordant une bande de Möbius très étroite.)*

Pour qu'une surface soit un point critique de l'aire parmi les surfaces de même bord qu'elle (c'est le cas pour notre pellicule de savon en position d'équilibre), il

Point! de branchement  
 Hérisson! minimal  
 Surface! de Enneper  
 Surface! de Henneberg

est nécessaire et suffisant que sa courbure moyenne soit identiquement nulle. C'est la raison pour laquelle on dit qu'une surface immergée dans  $\mathbb{R}^3$  est minimale si sa courbure moyenne est identiquement nulle. Pour des raisons analytiques, il est naturel d'étendre cette définition à des surfaces admettant un nombre fini de singularités, appelées *points de branchement*.

Les *hérissons minimaux* (i.e. de courbure moyenne nulle) sont exactement les surfaces minimales (branchées ou non branchées) qui admettent au plus un plan tangent orienté dans chaque direction. Si  $\varphi$  est l'extension positivement 1-homogène à  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  d'une fonction réelle  $h$  de classe  $C^2$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{S}^2$ , la condition pour que le hérisson  $\mathcal{H}_h$  soit minimal est que  $\varphi$  soit harmonique :

$$\Delta\varphi = 0.$$

Cette condition est automatiquement vérifiée si  $h$  est la restriction à  $\Omega$  d'une fonction harmonique  $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  positivement  $(-2)$ -homogène :

$$\forall v \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \forall t > 0, f(tv) = t^{-2}f(v).$$

Le hérisson minimal de fonction support

$$f(x, y, z) = \frac{(x^2 - y^2)(2r - z)}{2(r - z)^2}, \text{ où } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

n'est autre que la fameuse *surface de Enneper* — voir FIG. 1.12 page ci-contre. Notons que tout hérisson  $\mathcal{H}_f$  se décompose de manière unique en la somme d'un hérisson centré  $\mathcal{H}_g$  (i.e. symétrique par rapport à l'origine) et d'un hérisson projectif  $\mathcal{H}_h$  :

$$f(u) = g(u) + h(u),$$

$$\text{où } g(u) = \frac{1}{2}(f(u) + f(-u)) \text{ et } h(u) = \frac{1}{2}(f(u) - f(-u))$$

**Exercice** Vérifier que cette décomposition est unique et que  $\mathcal{H}_g$  est bien centré.

Pour la surface de Enneper, on obtient ainsi :

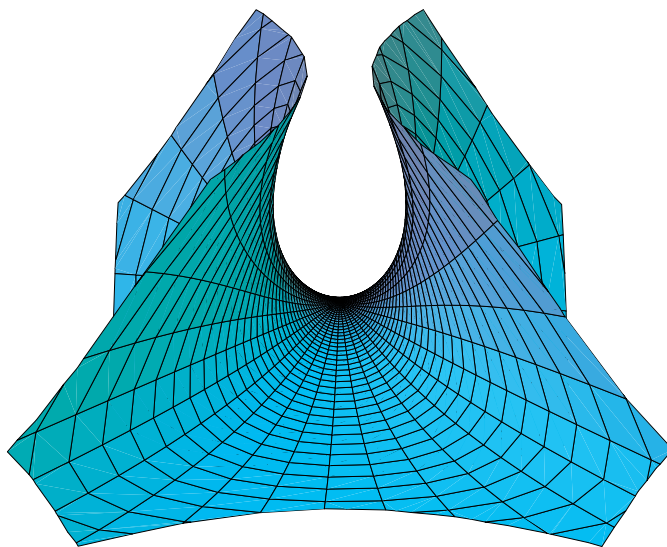
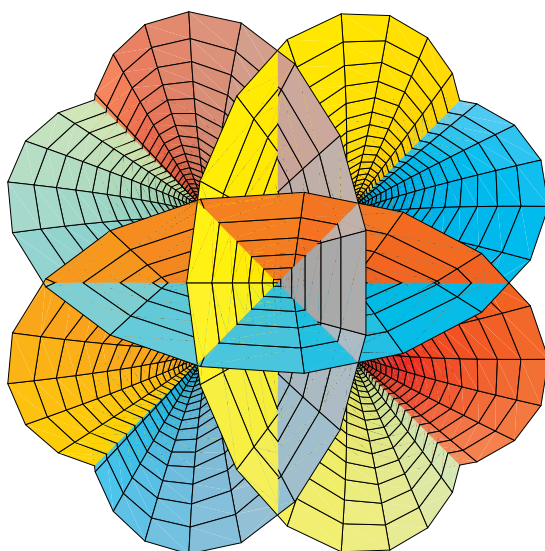
$$g(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } h(x, y, z) = \frac{z(x^2 - y^2)(2r^2 + x^2 + y^2)}{2r^3(x^2 + y^2)^2}.$$

Le hérisson projectif  $\mathcal{H}_h$  est une surface minimale non orientable appelée *surface de Henneberg*. Le hérisson centré  $\mathcal{H}_g$  admet 5 plans de symétrie (à savoir les plans  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = y$  et  $x = -y$ ), 4 courbes de points doubles situées dans le plan  $z = 0$  et 4 points de branchement : le point  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$  et les points s'en déduisant par symétrie. Cette surface minimale est représentée à la figure 1.13.

L'auteur a établi dans [17] que la racine carrée de l'aire des surfaces minimales est une fonction convexe de la fonction support. Plus précisément, si  $H(S)$  désigne l'espace vectoriel des hérissons minimaux modélés sur un domaine compact  $S \subset \mathbb{S}^2$  et définis à une translation près, alors

$$\sqrt{a} : H(S) \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto \sqrt{\text{aire}[x_h(S)]}$$

définit une norme associée à un produit scalaire (ce dernier s'interprète comme une aire mixte). Le lecteur intéressé par les hérissons minimaux pourra consulter [13], [12], [17] et [27].

FIG. 1.12 – *La surface de Enneper*FIG. 1.13 – *La symétrisation centrale de la surface de Enneper*

## 1.7 Compléments et problèmes ouverts

Notre voyage chez les hérissos touche à sa fin. Avant de nous quitter, évoquons brièvement quelques problèmes de géométrie relatifs aux hérissos.

Stade de Bunimovitch

**a. Les jeux de billard**

Une table de billard plane est un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  bordé par une ou plusieurs courbes différentiables par morceaux. Le (système dynamique du) billard est défini par le mouvement d'une particule élastique qui se déplace dans  $\mathcal{D}$  à une vitesse constante et qui rebondit sur le bord comme une boule de billard (l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion). Si la particule (ou « boule de billard ») heurte un coin de la table, la suite du mouvement n'est pas défini. Certaines formes de tables, telles les tables circulaires, conduisent à une dynamique régulière. D'autres, tel le *stade de Bunimovitch* (bordé par une courbe  $C^1$  formée de deux demi-cercles joints par des segments parallèles) engendrent le chaos. Qu'en est-il du jeu de billard dans un hérisson plan sans point multiple (tels les hérissons de la figure FIG. 1.1 page 5)? S'agit-il d'un système ergodique? Les points périodiques forment-ils une partie dense? Le lecteur intéressé par les jeux de billard pourra consulter le tour d'horizon de S. Tabachnikov [29].

---

**Exercice** Étudier le jeu de billard dans les hérissons de la figure 1.1. Ces billards sont-ils dispersants? En d'autres termes, un faisceau de rayons parallèles est-il dispersé après réflexion? Représenter ces jeux de billard.

Ces questions se posent également en dimension supérieure (les jeux de billard ne sont que les flots géodésiques dans les variétés riemanniennes à bord).

**b. Les corps convexes de largeur constante**

Soit  $K$  un corps convexe de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On appelle *largeur* de  $K$  dans la direction  $u$ , la distance entre ses deux hyperplans support orthogonaux à  $u$ . Cette largeur  $w_K(u)$  est donc donnée par

$$w_K(u) = h(u) + h(-u),$$

où  $h$  désigne la fonction support de  $K$ . On peut noter que cette largeur est encore définie pour un hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$  bien qu'elle puisse alors être négative. Les corps convexes de largeur constante ont fait l'objet de très nombreux travaux (voir, par exemple, le tour d'horizon de G.D. Chakerian et H. Groemer [6]). De tels corps ont été utilisés, par exemple, pour forer des trous carrés.

Soit  $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un corps convexe de largeur constante et de fonction support  $C^2$ . Les milieux des diamètres de  $K$  forment un hérisson projectif : la frontière de  $K$  est la somme d'un hérisson projectif et d'une sphère centrée à l'origine.

---

**Exercice** *Le prouver.*

Les hérissons projectifs constituent donc un outil intéressant pour l'étude des corps convexes de largeur constante (voir [15], [19] et [22]). Voici un célèbre problème ouvert portant sur les corps convexes de largeur constante :

**Problème (ouvert).** *Parmi les corps convexes de  $\mathbb{R}^3$  de largeur constante égale à  $c$ , quels sont ceux dont l'aire est minimale?*

Le problème a été résolu dans  $\mathbb{R}^2$  : il s'agit des triangles de Reuleaux (voir, par exemple, [6]).

---

**Exercice** Représenter des corps convexes plans non circulaires qui sont de largeur constante. Indication : la somme d'un hérisson projectif non trivial et d'un cercle de rayon assez grand donne un tel corps.

Podaire  
Point! à l'infini  
Plan projectif! dual  
Dual(e)! Plan projectif

### c. Les points isocordes

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe convexe de  $\mathbb{R}^2$  (ou plus généralement une hypersurface convexe de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). On dit qu'un point intérieur à  $\mathcal{C}$  est un point isocorde de  $\mathcal{C}$ , si toutes les cordes de  $\mathcal{C}$  passant par ce point ont la même longueur. Les hypersurfaces convexes qui admettent un point isocorde peuvent être caractérisées en termes de hérissons de largeur constante [18]. Voici un autre problème ouvert célèbre portant sur les points isocordes (pour plus de détails voir les articles de V. Klee [9] et [10]) :

**Problème (ouvert).** Existe-t-il une courbe convexe plane admettant deux points isocordes ?

---

#### Exercice

**1. Représenter** des corps convexes plans non circulaires ayant un point isocorde. Indication : considérer une courbe convexe d'équation polaire  $r = r(\theta)$ , où  $r(\theta)$  est une fonction  $> 0$  non constante vérifiant  $r(\theta + \pi) + r(\theta) = \text{cste}$ .

**2. Soit**  $\mathcal{C}$  une courbe convexe lisse de  $\mathbb{R}^2$ . Étant donné  $\omega \in \mathbb{R}^2$ , on fait correspondre à chaque point de  $\mathcal{C}$ , la projection orthogonale de  $\omega$  sur la tangente à  $\mathcal{C}$  en ce point. Cela définit une application  $P_\omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, m \mapsto P_\omega(m)$  dont l'image  $P_\omega(\mathcal{C})$  est appelée podaire de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\omega$ . On étend cette définition aux hérissons en considérant les droites support au lieu des tangentes. Établir les propositions suivantes :

- (i) Si  $\mathcal{C}$  est de largeur constante, alors  $\omega$  est un point isocorde de la podaire  $P_\omega(\mathcal{C})$ , mais celle-ci n'est pas nécessairement une courbe convexe.
- (ii) Si  $\omega$  est un point isocorde de  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{C}$  est la podaire par rapport à  $\omega$  d'un hérisson convexe de largeur constante.

### d. Dualité projective et balles de tennis

Le plan projectif réel  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  est l'espace des directions de droites de  $\mathbb{R}^3$ . Il s'identifie à la sphère  $\mathbb{S}^2$  quotientée par l'antipodie. Le plan affine réel se plonge naturellement dans  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  : on peut le considérer comme le plan d'équation  $z = 1$  et identifier chacun de ses points à la droite vectorielle qu'il engendre dans  $\mathbb{R}^3$ . Géométriquement, ce plongement correspond à l'adjonction de « points à l'infini », à savoir les directions de droites du plan affine (ici les directions de droites du plan  $z = 0$ ). Le plan projectif dual  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})^*$  est l'espace des directions de droites de l'espace vectoriel dual  $(\mathbb{R}^3)^*$ . Il s'identifie à l'espace des plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , et donc par orthogonalité dans  $\mathbb{R}^3$  à  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe différentiable de  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ . à tout  $m \in \mathcal{C}$ , on associe la direction orthogonale à l'ensemble des directions formant dans  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  la tangente en  $m$ . En d'autres termes, si cette tangente a pour équation  $ax + by = c$ , on associe à  $m$  la direction orthogonale au plan vectoriel d'équation  $ax + by - cz = 0$ . L'image de  $\mathcal{C}$  est alors une courbe (pas nécessairement différentiable) de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ,

Courbe! duale  
Dual(e)! courbe  
Dual(e)! Hérisson  
Hérisson! dual

appelée *courbe duale* de  $\mathcal{C}$  et notée  $\mathcal{C}^*$ . En choisissant judicieusement les « points à l'infini », il est généralement possible d'envisager  $\mathcal{C}^*$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On notera que les tangentes doubles de  $\mathcal{C}$  correspondent aux points doubles de  $\mathcal{C}^*$ .

**Exercice** Supposons  $\mathcal{C}$  de classe  $C^2$ . Montrer que les points d'inflexion de  $\mathcal{C}$  correspondent aux points de rebroussement de  $\mathcal{C}^*$ .

On définit également la notion de *hérisson dual* en considérant les droites support au lieu des tangentes.

**Exercice**

1. Le dual d'un hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  est-il nécessairement une courbe simple?
2. Soit  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  un hérisson dont la fonction support ne s'annule pas. Montrer que son dual  $\mathcal{H}_h^*$  n'est autre que la courbe d'équation polaire  $r = \frac{1}{h(\theta)}$ .
3. Représenter des couples de courbes duales.

La figure 1.14 représente un couple de courbes duales : le hérisson de fonction support  $h(\theta) = \frac{1}{3 - \cos(4\theta)}$  et la courbe d'équation polaire  $r = 3 - \cos(4\theta)$ .

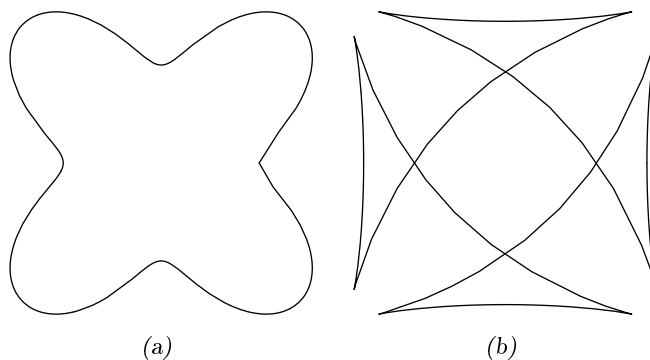


FIG. 1.14 – Deux courbes duales

On peut également définir une courbe duale comme une courbe sphérique. C'est ainsi que l'auteur en a déduit deux cas particuliers du théorème de la balle de tennis de V. I. Arnold (voir [16] et [22]).

**Théorème de la balle de tennis (V. I. Arnold [4]).** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe fermée simple et lisse de la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Si  $\mathcal{C}$  divise  $\mathbb{S}^2$  en deux parties d'aires égales, alors  $\mathcal{C}$  admet au moins 4 points d'inflexion (i.e. où la courbure géodésique s'annule).

Nous voici arrivés au terme de notre voyage. Nous n'avons survolé ici que les applications les plus « visualisables » des hérissons. Nous aurions pu nous intéresser également à leurs applications aux zonoides [24], à l'étude d'inégalités géométriques [20], aux hypersurfaces algébriques [13], etc. Nous aurions pu aussi définir des hérissons plus généraux et parler, par exemple, des polygones hérissons ou encore envisager des problèmes liés à la théorie des EDP comme le problème

de Minkowski (problème de la courbure de Gauss prescrite) [24]. Ce sera peut-être pour un prochain voyage chez nos amis les hérissons ...

## 1.8 Les codes Mathematica de cet atelier

### Figure 1

```
1.a. In[1] := h[t_] := 10 + Cos[3t]
1.b. In[2] := h[t_] := Cos[2t]
1.c. In[3] := h[t_] := Sin[3t]
In[4] := ParametricPlot[{h[t] Cos[t] - h'[t] Sin[t],
h[t] Sin[t] + h'[t] Cos[t]}, {t, 0, 2π},
AspectRatio->Automatic, Axes->True]
```

### Figure 2

```
2.a. In[5] := Show[Graphics[{Hue[0.1],
Polygon[{0, 3}, {0, 0}, {5, 0}, {4, 2}],
Disk[{0, 0}, 3, {90 Degree, 180 Degree}],
Disk[{1, 0}, {4, 2}, {180 Degree, 360 Degree}],
AspectRatio->Automatic]
2.b. In[6] := Show[Graphics[{Hue[0.1],
Disk[{0, 0}, 3, {90 Degree, 180 Degree}],
Disk[{0, 0}, {5, 3}, {0 Degree, 90 Degree}],
Disk[{1, 0}, {4, 1}, {180 Degree, 360 Degree}],
AspectRatio->Automatic]
```

### Figure 3

```
In[7] := h[t_] :=  $\sum_{k=1}^5 \frac{\text{Sin}[7^k t]}{8^k}$ 
In[8] := ParametricPlot[{h[t] Cos[t] - h'[t] Sin[t],
h[t] Sin[t] + h'[t] Cos[t]},
{t, 0, π}, PlotPoints->100000, AspectRatio->Automatic, Axes->True]
```

### Figure 4

```
In[9] := h[t_] :=  $\sqrt{1 + \text{Sin}[t]^2}$ 
In[10] := T=Table[ParametricPlot[{(h[t]-n) Cos[t] - h'[t] Sin[t],
(h[t]-n) Sin[t] + h'[t] Cos[t]}, {t, 0, 2π},
AspectRatio->Automatic, Axes->True,
DisplayFunction->Identity], {n, 0, 2.3, 0.23}]
Show[Table[T[[i]], {i, 1, 5}], DisplayFunction->DisplayFunction]
Show[Table[T[[i]], {i, 5, 10}], DisplayFunction->DisplayFunction]
Show[Table[T[[i]], {i, 1, Length[T]}], DisplayFunction->DisplayFunction]
```

### Figure 5

```
In[11] := ParametricPlot3D[{Cos[2t] (1 +  $\frac{r}{3}$  Cos[t]),
Sin[2t] (1 +  $\frac{r}{3}$  Cos[t]),  $\frac{r}{3}$  Sin[t]},
{r, 0, 1}, {t, 0, 2π}, PlotPoints -> {10, 63},
```

```
LightSources->{{1,0,1},RGBColor[0,1,1]},{0,1,1},RGBColor[1,0,0]},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
```

Figure 6

```
In[12]:= Simplify[{xy, yz, zx}/.
{x->Cos[u] Cos[v], y->Sin[u] Cos[v], z->Sin[v]}]
ParametricPlot3D[%, {u,0,2π}, {v,0,π},
PlotPoints->40, ViewPoint->{1,1,1},
LightSources->{{1,0,1/2},RGBColor[1,1,0]},
{{-1/2,√3/2,1/2},RGBColor[0,1,1]},
{{-1/2,-√3/2,1/2},RGBColor[1,0,1]}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
Show[%, ViewPoint->{-1,-1,-1}]
```

Figure 7

```
In[13]:=
Simplify[{1/2((2x2 - y2 - z2) + 2yz(y2 - z2) + zx(x2 - z2) + xy(y2 - x2)),
√3/2((y2 - z2)) + zx(z2 - x2) + xy(y2 - x2),
(x + y + z)((x + y + z)3 + 4(y - x)(z - y)(x - z))}/.
{x->Cos[u] Cos[v], y->Sin[u] Cos[v], z->Sin[v]}]
ParametricPlot3D[%, {u,0,2π}, {v,0,π},
PlotPoints->75, ViewPoint->{0,0,2},
LightSources->{{-0.4,0.2,0.3},RGBColor[1,1,0]},
{0.3,-0.4,0.2},RGBColor[0,1,1]},
{0.2,0.3,-0.4},RGBColor[0,1,0]}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
Show[%, ViewPoint->{0,0,-2}]
```

Figure 8

```
In[14]:= h[x_,y_,z_]:= x(x2 - 3y2) + 2 z3
/x2 + y2 + z2
In[15]:= xh[x_,y_,z_]:= {∂xh[x,y,z],∂yh[x,y,z],∂zh[x,y,z]}
Simplify[xh[x,y,z]/.
{x->Cos[u] Cos[v], y->Sin[u] Cos[v], z->Sin[v]}]
ParametricPlot3D[%, {u,0,2π}, {v,0,π},
PlotPoints->50, ViewPoint->{0,0,2},
LightSources->{{1,0,3},RGBColor[1,0,0]},
{{-1/2,√3/2,3},RGBColor[0,1,0]},
{{-1/2,-√3/2,3},RGBColor[0,0,1]}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
Show[%, ViewPoint->{0,0,-2}]
```

Figure 9

```
In[16]:= h[x_,y_,z_]:= -z3
/x2 + y2 + z2
In[17]:= xh[x_,y_,z_]:= {∂xh[x,y,z],∂yh[x,y,z],∂zh[x,y,z]}
```



```
Simplify[xh[x,y,z]/.
{x->Cos[u] Cos[v], y->Sin[u] Cos[v], z->Sin[v]}]
ParametricPlot3D[%, {u,0,2π}, {v,0,π/2},
PlotPoints->50, ViewPoint -> {-1,-1,-0.6},
LightSources->{{{ -1,-1,5},RGBColor[0,1,1]},
{0,1,1},RGBColor[1,1,0]}}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
```

Figure 10

```
In[18] := h[x_,y_,z_] :=  $\frac{2x(x^2 - 3y^2) + 4z^3}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{3yz^2(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ 
In[19] := xh[x_,y_,z_] := {∂xh[x,y,z], ∂yh[x,y,z], ∂zh[x,y,z]}
Simplify[xh[x,y,z]/.
{x->Cos[u] Cos[v], y->Sin[u] Cos[v], z->Sin[v]}]
ParametricPlot3D[%, {u,0,2π}, {v,0,π/2},
PlotPoints->66, ViewPoint->{0,0,5},
LightSources->{{{1,0,5},RGBColor[1,0,0]},
{{-1/2, √3/2, 5},RGBColor[0,1,0]},
{{-1/2, -√3/2, 5},RGBColor[0,0,1]}}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
Show[%, ViewPoint->{0,0,-5}]
```

Figure 11

```
In[20] := ParametricPlot3D[{u,v2,u2 + v3},{u,-0.4,0.4},{v,-0.6,0.6},
PlotPoints->40, ViewPoint -> {1.2,0.2,1},
LightSources->{{{ -1,0.5,1},RGBColor[0,0.75,1]},
{2,1,0.5},RGBColor[1,1,0.5]}}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
ParametricPlot3D[{u, uv + v3, u2 - 2uv2 - 3v4},
{u,-0.9,0.4}, {v,-1.1,1.1},
PlotPoints->40, ViewPoint -> {-0.5,0,2.5},
LightSources->
{{{ -1,1,3},RGBColor[0,1,1]},
{1,1,3},RGBColor[1,1,0.2]}}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
ParametricPlot3D[{-u, -uv + v3, -u2 + 2uv2 - 3v4},
{u,-0.5,1.25}, {v,-1.2,1.2},
PlotPoints->40, ViewPoint -> {-1,0,2.5},
LightSources->{{{ -1,0.5,2.5},RGBColor[0,1,1]},
{1,0.5,2.5},RGBColor[1,0.8,0.2]}}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
```

Figure 12

```
In[21] := h[x_,y_,z_] :=  $\frac{(x^2 - y^2)(2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - z}$ 
```

Bonnet croisé! hérisson  
 Hérisson! discret  
 Bonnet croisé! hérisson discret  
 Polyèdre

```
In[22] := xh[x_,y_,z_] := {∂xh[x,y,z], ∂yh[x,y,z], ∂zh[x,y,z]}
Simplify[xh[x,y,z]/.
{x->Cos[u] Cos[v], y->Sin[u] Cos[v], z->Sin[v]}]
ParametricPlot3D[%, {u,0,2π}, {v,-π/2,0.9},
PlotPoints->50, ViewPoint->{0,2,1},
LightSources->{{{-1,0,1},RGBColor[0.4,0.6,1]},
{{1,-1,1},RGBColor[0,1,0.6]}}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
```

Figure 13

```
In[23] := h[x_,y_,z_] := (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + z^2)^(3/2) /
(x^2 + y^2)^2
In[24] := xh[x_,y_,z_] := {∂xh[x,y,z], ∂yh[x,y,z], ∂zh[x,y,z]}
Simplify[xh[x,y,z]/.
{x->Cos[u] Cos[v], y->Sin[u] Cos[v], z->Sin[v]}]
ParametricPlot3D[%, {u,0,2π}, {v,-0.75,0.75},
PlotPoints->62, ViewPoint->{0,0,1},
LightSources->{{{1,0,1},RGBColor[1,1,0]},
{{-1/2, √3/2, 1},RGBColor[0,1,1]},
{{-1/2, -√3/2, 1},RGBColor[1,0,0]}}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
```

Figure 14

```
In[25] := h[t_] := 1 / (3 - Cos[4t])
In[26] := ParametricPlot[{Cos[t]/h[t], Sin[t]/h[t]},
{t,0,2π}, AspectRatio->Automatic, Axes->True]
ParametricPlot[{h[t] Cos[t] - h'[t] Sin[t],
h[t] Sin[t] + h'[t] Cos[t]}, {t,0,2π},
AspectRatio->Automatic, Axes -> True]
```

Figure 15

Le bonnet croisé hérisson — voir FIG. 1.15 page ci-contre — est obtenu à l'aide du code suivant :

```
In[27] := ParametricPlot3D[{r^5 Cos[t], 1/2(r^6 Sin[2t]), -r^4},
{r,0,1.4}, {t,0,2π}, PlotPoints->50,
PlotRange->{-1,0}, ViewPoint -> {0,1,0.3},
LightSources->{{{0,0.8,1},RGBColor[0,1,1]},
{{1,0,1},RGBColor[1,1,0]}}},
AspectRatio->Automatic, Axes->True, Boxed->True]
```

Figure 16

Une version discrète du bonnet croisé hérisson : elle permet la construction d'un polyèdre hérisson hyperbolique en s'inspirant de [23]. La figure 1.16 est obtenue à l'aide du code suivant

```
In[28] := Show[Graphics3D[{
```

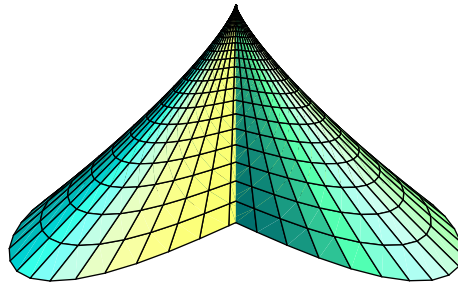


FIG. 1.15 – Un bonnet croisé hérisson

```

Polygon[{{6,0,5},{3,2,-0.2},{2,3,0.2}},
Polygon[{{6,0,5},{3,-2,-0.2},{2,-3,0.2}},
Polygon[{{6,0,5},{3,-2,-0.2},{2,3,0.2}},
Polygon[{{6,0,5},{2,-3,0.2},{3,2,-0.2}}]
],ViewPoint-->{10,0,1.75},Boxed->False]

```

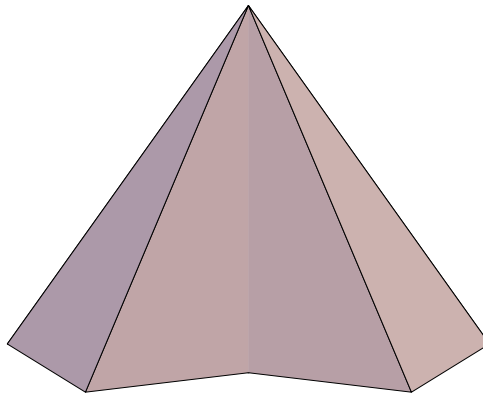


FIG. 1.16 – Une version discrète du bonnet croisé hérisson

## 1.9 Bibliographie

- [1] F. APÉRY. « La surface de Boy ». *Adv. in Math.*, 61:185–266, 1986.
- [2] F. APÉRY. *Models of the real projective plane*. Vieweg verlag, Wiesbaden, 1987.
- [3] V. I. ARNOLD. « Critical points of smooth functions ». Dans *Proc. Int. Cong. Math.*, volume 1, pages 19–39, 1974.
- [4] V. I. ARNOLD. *Topological invariants of plane curves and caustics*, volume 5. AMS, 1994. University Lecture Series.
- [5] L. BERGGREN, J. BORWEIN, et P. BORWEIN. *Pi: a source book*. Springer, 1997.
- [6] G.D. CHAKERIAN et H. GROEMER. « Convex bodies of constant width », pages 49–96. 1983.

- [7] L. EULER. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*. B. G. Teubner, Leipzig, 1913.
- [8] D. HILBERT et S. COHN-VOSSEN. *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Co, 1952. (Ouvrage original en allemand: *Anschauliche Geometrie*, Berlin (1932)).
- [9] V. KLEE. « Can a plane convex body have two equichordal points? ». *Amer. Math. Monthly*, 76 :54–55, 1969.
- [10] V. KLEE. « Some unsolved problems in plane geometry ». *Math. Mag.*, 52 :131–145, 1979.
- [11] N. KUIPER. « Convex immersions of closed surfaces in  $\mathbb{R}^3$  ». *Comment. Math. Helv.*, 35 :85–92, 1961.
- [12] R. LANGEVIN et H. ROSENBERG. « A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications ». *Duke Math. J.*, 57 :819–828, 1988.
- [13] R. LANGEVIN, G. LEVITT SINGULARITIES, et H. ROSENBERG. Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss). Dans *Singularities*, volume 20, pages 245–253. Banach Center Publ., 1988.
- [14] Y. MARTINEZ-MAURE. « A fractal hedgehog ». À paraître, (2001).
- [15] Y. MARTINEZ-MAURE. « Hérissons projectifs et corps convexes de largeur constante ». *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, vol. 321 :439–442, 1995.
- [16] Y. MARTINEZ-MAURE. « A Note on the Tennis Ball Theorem ». *Amer. Math. Monthly*, 103 :338–340, 1996.
- [17] Y. MARTINEZ-MAURE. « Hedgehogs and area of order 2 ». *Arch. Math.*, vol. 67 :156–163, 1996.
- [18] Y. MARTINEZ-MAURE. « Hedgehogs of constant width and equichordal points ». *Ann. Polon. Math.*, 67 :285–288, 1997.
- [19] Y. MARTINEZ-MAURE. « Sur les hérissons projectifs (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss) ». *Bull. Sci. Math.*, 121 :585–601, 1997.
- [20] Y. MARTINEZ-MAURE. « De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons ». *Arch. Math.*, 72 :444–453, 1999.
- [21] Y. MARTINEZ-MAURE. « Geometric inequalities for plane hedgehogs ». *Demonstratio. Math.*, 32 :177–183, 1999.
- [22] Y. MARTINEZ-MAURE. « Indice d'un hérisson : étude et applications ». *Publ. Mat.*, 44 :237–255, 2000.
- [23] Y. MARTINEZ-MAURE. « Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère ». *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, vol. 332 :41–44, 2001.
- [24] Y. MARTINEZ-MAURE. « Hedgehogs and zonoids ». *Adv. in Math.*, 158 :1–17, 2001.
- [25] B. MAZUR. « Le renard et le hérisson ». *La Recherche*, octobre 2001.
- [26] H. O. PEITGEN, H. JÜRGENS, et D. SAUPE. *Chaos and Fractals, New Frontiers of Sciences*. Springer Verlag, 1992.
- [27] H. ROSENBERG et E. TOUBIANA. « Complete minimal surfaces and minimal herissons ». *J. Differential Geom.*, 28 :115–132, 1988.
- [28] R. SCHNEIDER. *Convex Bodies : The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [29] S. TABACHNIKOV. *Billiards, Panoramas et Synthèses*, volume 1. SMF, Paris, 1995.
- [30] S. WOLFRAM. *Mathematica : A System for Doing Mathematics by Computer (The Mathematica Book)*. Addison Wesley, 2000. 4<sup>th</sup> edition.

# Index

## A

- Aire 8
- Arête de rebroussement 15
- Axe (de symétrie ternaire) 13

## B

- Bonnet croisé 13
  - hérisson 26
  - hérisson discret 26
- Brocot *voir* Arbre de Stern-Brocot

## C

- Carmichael *voir* Nombre de Carmichael
- Chapeau chinois 15
- Corps
  - convexe 6
  - strictement convexe 6

## Courbe

- convexe 4
- duale 21

## D

- DFC *voir* Développement
- DFE *voir* Développement
- Droite support 4
- Dual(e)
  - courbe 21
  - Hérisson 22
  - Plan projectif 21
- Dynamique *voir* Programmation

## E

- Enveloppe 4, 6

## F

- Farey *voir* Farey-Haros
- Fonction
  - d'appui 6
  - de courbure 7
  - support 4, 6

- Fonctions Mathematica
  - `ParametricPlot3D` 8

## G

- GLC *voir* Générateur linéaire congruentiel

## H

- Haros *voir* Farey-Haros
- Hérisson 5, 9
  - discret 26
  - dual 22
  - fractal 9
  - longueur d'un 8, 9
  - minimal 18
  - parallèle 11
  - projectif 5, 7
  - somme 11

## L

- Largeur
  - d'un hérisson 5
- Longueur
  - absolue d'un hérisson 9
  - d'un hérisson 8, 9

## N

- Nan *voir* Not a Number

## P

- Plan projectif
  - dual 21
  - réel 12
- Podaire 21
- Point
  - de branchement 18
  - à l'infini 21
- Polyèdre 26
- Projectif

Hérisson 5, 7

**Q**

Queue d'aronde 15

**S**

Somme (de deux hérissons) 11

Stade de Bunimovitch 20

Stern *voir* Arbre de Stern-Brocot

Surface

de Boy 14

de Enneper 18

de Henneberg 18

minimale 17

non orientable 12

romaine de Steiner 13

version hérisson 15

**T**

Terminale *voir* Récursivité