C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 1307–1310

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie

Dérivation des surfaces convexes de $\mathbb{R}^3$ dans l'espace de Lorentz et étude de leurs focales

Derivation of convex surfaces of $\mathbb{R}^3$ in Lorentz space and study of their focals

Yves Martinez-Maure

1, rue Auguste Perret, 92500 Rueil-Malmaison, France

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 17 novembre 2009
Accepté après révision le 21 octobre 2010
Disponible sur Internet le 18 novembre 2010

Dedicated to the memory of Heliodoro Martinez

Présenté par Étienne Ghys

R É S U M É

En introduisant une notion de dérivation des surfaces convexes de $\mathbb{R}^3$ dans l'espace de Lorentz–Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$, nous donnons pour les surfaces convexes de $\mathbb{R}^3$ un équivalent naturel d'une majoration du déficit isopérimétrique des courbes convexes de $\mathbb{R}^2$ en termes d'aire algébrique de leur développée. Nous établissons en outre une série d'inégalités géométriques pour les focales des surfaces convexes.

A B S T R A C T

Introducing a notion of derivation of closed convex surfaces of $\mathbb{R}^3$ in the Lorentz–Minkowski space $\mathbb{R}^{3,1}$, we give a natutal three-dimensional equivalent of an upper bound of the isoperimetric deficit of convex curves of $\mathbb{R}^2$ in terms of signed area of their evolute. Furthermore we etablish a series of geometric inequalities for focals of closed convex surfaces.

1. Introduction et majoration du déficit isopérimétrique dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{K}$ un corps convexe de classe C_+^4 [5] dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$. Paramétré par son vecteur normal sortant, le bord de $\mathcal{K}$ est un hérisson $\mathcal{H}_h$ de fonction de support définie sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$ par : $\forall u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^1$, $h(\theta) = \max_{x\in\mathcal{K}} \langle x, u(\theta)\rangle$, où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$. La développée (resp. la développée seconde) de $\mathcal{H}_h$ est encore un hérisson $\mathcal{H}_{\partial h}$ (resp. $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$) de fonction de support $(\partial h)(\theta) = h'(\theta - \frac{\pi}{2})$ (resp. $(\partial^2 h)(\theta) = -h''(\theta)$). L'aire $a(h)$ et la longueur $l(h)$ de $\mathcal{H}_h$, l'aire $a(\partial h)$ de sa développée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et l'aire mixte $a(h, \partial^2 h)$ de $\mathcal{H}_h$ et de sa développée seconde $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient [3, Prop. 6] :

$$0 \leqslant l(h)^2 - 4\pi a(h) \leqslant -4\pi a(\partial h) = -4\pi a\big(h, \partial^2 h\big). \tag{1}$$

La première inégalité est l'inégalité isopérimétrique. La seconde majore le déficit $l(h)^2 - 4\pi a(h)$ à l'aide des « courbes dérivées » $\mathcal{H}_{\partial h}$ et $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ de $\mathcal{H}_h$. Dans cette Note, nous prouvons que (1) admet un équivalent naturel en dimension 3.

Soit $\mathcal{K}$ un corps convexe de classe C_+^4 dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. Paramétré par son vecteur normal sortant, le bord de $\mathcal{K}$ est un hérisson $\mathcal{H}_h$ de fonction de support définie sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ par : $\forall u \in \mathbb{S}^2$, $h(u) = \max_{x\in\mathcal{K}} \langle x, u\rangle$, où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^3$. La développée moyenne de $\mathcal{H}_h$ est l'enveloppe des plans médiateurs des

Adresse e-mail : martinez@math.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.10.029

segments focaux $\sigma_h(u) := [c_h^1(u), c_h^2(u)]$, où $c_h^1(u)$, $c_h^2(u)$ sont les centres de courbure principaux de $\mathcal{H}_h$ au point de vecteur normal sortant u. Elle est, plus précisément, le hérisson de fonction de support $(\partial^2 h)(u) = -\frac{1}{2}(\Delta h)(u)$, où $(\Delta h)(u)$ est la somme des valeurs propres du hessien sphérique de h en u. L'intégrale de la courbure moyenne $m(h)$ de $\mathcal{H}_h$, son aire $s(h)$ et l'aire mixte $s(h, \partial^2 h)$ de $\mathcal{H}_h$ et de sa développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ (définie en polarisant la forme quadratique $h \longmapsto s(h)$ sur $C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$) sont données par [3] :

$$m(h) = \int_{\mathbb{S}^2} h \, d\sigma, \qquad s(h) = \int_{\mathbb{S}^2} R_h \, d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} h R_{(1,h)} \, d\sigma \quad \text{et} \quad s\big(h, \partial^2 h\big) = \int_{\mathbb{S}^2} \big(\partial^2 h\big) R_{(1,h)} \, d\sigma$$

où σ est la mesure de Lebesgue sphérique et R_h (resp. $R_{(1,h)}$) le produit $R_1 R_2$ (resp. la moyenne $\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$) des rayons de courbure principaux R_1, R_2 de $\mathcal{H}_h$, c'est-à-dire la fonction de courbure (resp. le rayon de courbure moyen) de $\mathcal{H}_h$. Pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, l'application tangente à la réciproque x_h de l'application de Gauss de $\mathcal{H}_h$ est donnée en u par $T_u x_h = h(u) Id_{T_u \mathbb{S}^2} + H_h(u)$, où $H_h(u)$ est l'endomorphisme symétrique associé au hessien de h en u [1]. Par conséquent, pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, $R_{(1,h)}(u) = \frac{1}{2} \operatorname{Trace}[T_u x_h] = (h + \frac{1}{2}\Delta h)(u)$ et $R_h(u) = \operatorname{dét}[T_u x_h]$.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{K}$ un corps convexe de classe C_+^4 de $\mathbb{R}^3$ et soit $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ sa fonction de support. L'intégrale de la courbure moyenne $m(h)$ du hérisson $\mathcal{H}_h$, son aire $s(h)$ et l'aire mixte $s(h, \partial^2 h)$ de $\mathcal{H}_h$ et de sa développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient :*

$$0 \leqslant m(h)^2 - 4\pi s(h) \leqslant -4\pi s\big(h, \partial^2 h\big). \tag{2}$$

L'encadrement (2) est vérifié pour tout hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$, où $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. L'aire "algébrique" $s(h)$ s'écrit alors $s_+(h) - s_-(h)$, où $s_+(h)$ (resp. $s_-(h)$) est l'aire totale des régions de $\mathcal{H}_h$ à courbure de Gauss > 0 (resp. < 0). Le lecteur pourra consulter [1] pour une introduction aux hérissons et [4] pour un panorama récent.

Démonstration. La première inégalité est bien connue pour $\mathcal{H}_h$ convexe (e.g. [5, p. 322]). Le cas général est traité dans [3]. Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne

$$m(h)^2 - 4\pi s(h) = \left(\int_{\mathbb{S}^2} R_{(1,h)} \, d\sigma \right)^2 - 4\pi s(h) \leqslant 4\pi \int_{\mathbb{S}^2} \big(R_{(1,h)}^2 - R_h\big) \, d\sigma.$$

Or, on a $\int_{\mathbb{S}^2} R_h \, d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} h R_{(1,h)} \, d\sigma$ par symétrie du volume mixte [3]. Comme $R_{(1,h)} = h + \frac{1}{2}\Delta h$, on en déduit que : $\int_{\mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2 - R_h) \, d\sigma = -s(h, \partial^2 h)$. □

La comparaison des encadrements (1) et (2) suggère l'existence d'une « surface dérivée » $\mathcal{H}_{\partial h}$ dont l'aire $s(\partial h)$ devrait vérifier :

$$0 \leqslant m(h)^2 - 4\pi s(h) \leqslant -4\pi s(\partial h) = -4\pi s\big(h, \partial^2 h\big).$$

Une telle notion de surface dérivée ne peut être définie dans $\mathbb{R}^3$ et c'est sans aucun doute ce qui explique que son existence soit passée inaperçue jusqu'à ce jour. Cette surface $\mathcal{H}_{\partial h}$ est en effet à chercher dans l'espace de Lorentz–Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. C'est en effet ce que nous suggère le fait que l'intégrale

$$-s\big(h, \partial^2 h\big) := \int_{\mathbb{S}^2} \big(R_{(1,h)}^2 - R_h\big) \, d\sigma = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} (R_1 - R_2)^2 \, d\sigma$$

soit l'aire de Laguerre du hérisson $\mathcal{H}_h$ paramétré par la réciproque $x_h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$, $u \mapsto \nabla h(u) + h(u)u$ de son application de Gauss (e.g. [2,6]) :

$$L(x_h) := \int_{\mathbb{S}^2} \frac{H^2 - K}{K} \frac{d\sigma}{K} = \int_{\mathbb{S}^2} \big(R_{(1,h)}^2 - R_h\big) \, d\sigma,$$

où H (resp. K) est la courbure moyenne (resp. de Gauss) de $\mathcal{H}_h$. Autrement dit, $-s(h, \partial^2 h)$ est égale à l'aire de la surface décrite dans l'espace $\Sigma \approx \mathbb{R}^{3,1}$ des sphères orientées et sphères-points de $\mathbb{R}^3$ par la sphère moyenne $S(\frac{1}{2}(c_h^1 + c_h^2)(u); R_{(1,h)}(u))$, orientée par u en $x_h(u)$, lorsque u décrit $\mathbb{S}^2$. Nous verrons que cette surface peut s'interpréter comme une surface dérivée $\mathcal{H}_{\partial h}$ de fonction de support $\partial h = (dh)/\sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2}\partial$ comme l'opérateur de Dirac–Hodge $D = d + \delta$, où δ est la codifférentiation extérieure, de sorte que l'on a bien $\partial^2 h = \frac{1}{2}\delta(dh) = -\frac{1}{2}\Delta h(u)$. En passant, cela permet d'interpréter l'aire de Laguerre $L(x_h)$ comme l'aire mixte $s(h, \partial^2 h)$.

2. Développement des hérissons de $\mathbb{R}^3$ dans l'espace de Lorentz $\mathbb{R}^{3,1}$

Reprenons les notations précédentes. Posons $\mathbb{R}^{3,1} = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \langle .,. \rangle_{3,1})$, où $\langle .,. \rangle_{3,1}$ est la métrique de Lorentz : $\langle (x;t),(x';t') \rangle_{3,1} = \langle x, x' \rangle - tt'$. Pour tout $(x;r) \in \mathbb{R}^{3,1}$, $(x;r)$ sera vu comme la sphère $S(x;|r|)$ de $\mathbb{R}^3$ orientée par le vecteur normal sortant (resp. rentrant) si $r > 0$ (resp. $r < 0$), et comme la sphère-point $\{x\}$ si $r = 0$.

Pour interpréter $-s(h, \partial^2 h)$ comme l'aire d'une surface dérivée, identifions pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, la droite normale à $\mathcal{H}_h$ en $x_h(u)$, soit $N_h(u) := \{\nabla h(u)\} + \mathbb{R}u$, à la droite $L_h(u) := \{(\nabla h(u); h(u))\} + \mathbb{R}(u; -1)$ de $\mathbb{R}^{3,1}$, en associant à $x_h(u)$ (resp. à tout $x \in N_h(u) - \{x_h(u)\}$), la sphère-point $(x_h(u); 0)$ (resp. la sphère de centre x passant par $x_h(u)$ et orientée par u en $x_h(u)$), à l'aide de la bijection $\Sigma_h(u) : N_h(u) \to L_h(u)$, $\nabla h(u) + \lambda u \mapsto (\nabla h(u); h(u)) + \lambda(u; -1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le point $c_h(u) = \frac{1}{2}(c_h^1 + c_h^2)(u) = \nabla h(u) - \frac{\Delta h(u)}{2} u$ de la surface moyenne $\mathcal{M}_h = c_h(\mathbb{S}^2)$ est ainsi identifié à la sphère moyenne $(c_h(u); R_{(1,h)}(u))$ orientée par u en $x_h(u)$. L'hypersurface réglée $\mathcal{L}_h$ de $\mathbb{R}^{3,1}$ dont les $L_h(u)$ sont les génératrices est l'enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation

$$\langle (x;t), u_L \rangle_{3,1} = \frac{h(u)}{\sqrt{2}}, \quad \text{où } u_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(u; -1).$$

Elle peut être paramétrée par $\Lambda_h : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3,1}$, $(u, r) \mapsto (x_h(u); 0) - r(u; -1)$. Elle jouit d'un « caractère hérisson » (de « fonction de support » $h(u)/\sqrt{2}$) dans la mesure où u_L reste $\langle .,. \rangle_{3,1}$-orthogonal à l'espace tangent à $\mathcal{L}_h$ tout le long de $L_h(u)$. Comme tous les hérissons parallèles $\mathcal{H}_{h+t}$ ($t \in \mathbb{R}$), ont la même surface moyenne et, pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, la même normale $N_h(u)$ et des droites $L_{h+t}(u)$ (resp. des sphères moyennes $(c_{h+t}(u); R_{(1,h+t)}(u))$) telles que $L_{h+t}(u) = L_h(u) + \{(0_{\mathbb{R}^3}; t)\}$ (resp. $(c_{h+t}(u); R_{(1,h+t)}(u)) = (c_h(u); R_{(1,h)}(u)) + \{(0_{\mathbb{R}^3}; t)\}$), nous considérerons $\mathcal{L}_h$ et toutes les $\mathcal{L}_{h+t} = \mathcal{L}_h + \{(0_{\mathbb{R}^3}; t)\}$ comme une seule et même hypersurface. Comme $\{h + t \mid t \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des fonctions dont ∇h est le gradient, on définira donc la « fonction de support » de $\mathcal{L}_h$ par $\partial h := (\mathrm{d}h)/\sqrt{2}$. L'identification des normales à $\mathcal{H}_h$ aux génératrices de $\mathcal{L}_h$ fait correspondre à la surface moyenne $\mathcal{M}_h$, une surface $\mathcal{H}_{\partial h} \subset \mathcal{L}_h$ (que l'on confond avec ses translatées $\mathcal{H}_{\partial(h+t)} \subset \mathcal{L}_{h+t}$). Cette surface est paramétrée par $x_{\partial h} : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{H}_{\partial h}$, $u \mapsto (c_h(u); R_{(1,h)}(u)) = (x_h(u); 0) - R_{(1,h)}(u)(u; -1) = (\nabla h(u); h(u)) + (y; s)$, où $(y; s) \in \mathbb{R}(u; -1)$ est déterminé par :

$$\langle (y;s), v_L \rangle_{3,1} = -\frac{\Delta h(u)}{\sqrt{2}} = \delta(\partial h)(u), \quad \text{où } v_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(u; 1).$$

Le calcul de sa première forme fondamentale g donne $x_{\partial h}^* g = \frac{1}{4}(R_1 - R_2)^2 g_S$, où $x_{\partial h}^* g$ est l'image réciproque de g par $x_{\partial h}$ et g_S la métrique standard sur $\mathbb{S}^2$. L'aire de $\mathcal{H}_{\partial h}$ est donc égale à $-s(h, \partial^2 h)$. Son élément d'aire $\frac{1}{4}(R_1 - R_2)(u)^2 \, \mathrm{d}\sigma(u)$ n'est autre que la projection orthogonale sur le plan médiateur du segment focal $\sigma_h(u)$ de l'élément d'aire correspondant de la surface moyenne. Comme la composée de l'application tangente $T_u x_{\partial h} : T_u \mathbb{S}^2 \to T_{x_{\partial h}(u)} \mathcal{L}_h$ avec la projection de $T_{x_{\partial h}(u)} \mathcal{L}_h = (T_u \mathbb{S}^2 \times \{0\}) \oplus \mathbb{R}(u; -1)$ sur $T_u \mathbb{S}^2 \times \{0\} \approx T_u \mathbb{S}^2$ inverse l'orientation, nous définirons l'aire algébrique de $\mathcal{H}_{\partial h}$ par : $s(\partial h) := s(h, \partial^2 h)$. Notons que les surfaces dérivées $\mathcal{H}_{\partial h}$ forment un espace vectoriel sur lequel $\partial h \mapsto \sqrt{-s(\partial h)}$ est une norme associée à un produit scalaire s'interprétant comme une aire mixte.

3. Des inégalités de type Brunn–Minkowski pour les surfaces focales

Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^3$ de fonction de support $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. Sa focale $\mathcal{F}_h$ est définie comme le lieu de ses centres de courbure principaux (ou, ce qui est équivalent, comme l'enveloppe de ses normales). Définissons le volume de $\mathcal{F}_h$ par :

$$v(\nabla h) := -\int_{\mathbb{R}^3} i_{\mathcal{F}_h}(x) \, \mathrm{d}x,$$

où $i_{\mathcal{F}_h}(x) := 1 - \frac{1}{2}\nu_h(x)$, en désignant par $\nu_h(x)$ le nombre de normales orientées à $\mathcal{H}_h$ passant par x. Notons que $\mathcal{F}_h$, et donc son volume, ne dépendent que de ∇h.

Théorème 2. *Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^3$ de fonction de support $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. Le volume de la focale $\mathcal{F}_h$ de $\mathcal{H}_h$ est donné par :*

$$v(\nabla h) = \frac{1}{6} \int_{\mathbb{S}^2} |R_1 - R_2|^3 \, \mathrm{d}\sigma = \frac{4}{3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(R_{(1,h)}^2 - R_h\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}\sigma,$$

où R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure principaux de $\mathcal{H}_h$.

Démonstration. On exprime $v(\nabla h)$ comme une intégrale sur $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$ en notant que $-i_{\mathcal{F}_h}(x) = \mathrm{Card}[\gamma_h^{-1}(\{x\})]$, où $\gamma_h : \mathbb{S}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $(u,t) \mapsto t c_h^1(u) + (1-t) c_h^2(u)$, $c_h^1(u)$, $c_h^2(u)$ désignant les centres de courbure principaux de $\mathcal{H}_h$ en $x_h(u)$. $\square$

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel réel des familles de hérissons parallèles de classe C^4 de $\mathbb{R}^3$. L'application $v : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$, $\nabla h \mapsto v(\nabla h)^{\frac{1}{3}}$ est une norme.*

En majorant $|s(\partial h)|$ à l'aide de l'inégalité de Hölder avec $(p,q)=(3/2,3)$, il vient :

Corollaire 2. *Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^3$ de fonction de support $h \in C^4(\mathbb{S}^2;\mathbb{R})$. L'aire de la surface dérivée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et le volume de la focale $\mathcal{F}_h$ vérifient*

$$4\left|s(\partial h)\right|^3 \leqslant 9\pi\, v(\nabla h)^2.$$

Références

[1] R. Langevin, G. Levitt, H. Rosenberg, Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss), in: Singularities, Warsaw, 1985, in: Banach Center Publ., vol. 20, PWN, Warsaw, 1988, pp. 245–253.

[2] T. Li, Laguerre geometry of surfaces in $\mathbb{R}^3$, Acta Math. Sin., Engl. Ser. 21 (2005) 1525–1534.

[3] Y. Martinez-Maure, De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons, Arch. Math. 72 (1999) 444–445.

[4] Y. Martinez-Maure, New notion of index for hedgehogs of $\mathbb{R}^3$ and applications, Eur. J. Comb. 31 (2010) 1037–1049.

[5] R. Schneider, Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[6] C. Wang, Weierstrass representations of Laguerre minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, Result Math. 52 (2008) 399–408.