Problème

Ce problème est constitué de 4 parties largement (mais pas totalement) indépendantes. Le candidat est invité à traiter en priorité les questions 1 et 2 de la partie A qui lui seront utiles dans l'ensemble du sujet.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{n,k}(X)$ ou simplement $B_{n,k}$ le polynôme

$$\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k},$$

où les $\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux, si bien que l'on a , pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$B_{n,k}(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernstein. L'objet de ce problème est d'étudier la famille formée par l'ensemble de ces polynômes et son utilité dans les applications sous différents aspects (algébriques, probabilistes, géométriques et analytiques).

Partie A. Généralités sur les polynômes de Bernstein

1. Premières conséquenses des définitions.

a. Les racines de $B_{n,k}(X)$ et le signe de la fonction $B_{n,k}(t)$ sur $[0, 1]$.

a. i. Donner les expressions de $B_{0,0}(X)$, $B_{n,0}(X)$ et $B_{n,n}(X)$.

On a : $B_{0,0}(X) = 1$, $B_{n,0}(X) = (1-X)^n$ et $B_{n,n}(X) = X^n$.

a. ii. Expliciter les racines de $B_{n,k}(X)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de $k \in [\![0, n]\!]$.

$B_{0,0}$ est constant égal à 1 et ne s'annule donc pas.
$B_{n,0}(X) = (1-X)^n$ s'annule en 1 et seulement en 1 pour tout entier $n \geq 1$.
$B_{n,n}(X) = X^n$ s'annule en 0 et seulement en 0 pour tout entier $n \geq 1$.
$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ s'annule en 0 et en 1, et seulement en 0 et en 1, pour tout (n, k) tel que $k \neq 0$, $n \geq 1$ et $k < n$.

a. iii. Étudier le signe de la fonction $B_{n,k}(t)$ sur $[0, 1]$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de $k \in [\![0, n]\!]$.

Dans tous les cas, $B_{n,k}(t)$ est ≥ 0 sur $[0, 1]$ comme produit de facteurs ≥ 0 sur $[0, 1]$, et $B_{n,k}(t)$ est > 0 sur $]0, 1[$ comme produit de facteurs > 0 sur $]0, 1[$.

b. Les polynômes de Bernstein d'un même degré forment une partition de l'unité.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(X) = 1$.

Nous avons en effet

[1] Y. Martinez-Maure

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+(1-X))^n = 1^n = 1$$

en appliquant la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

et en prenant $a = X$ et $b = 1 - X$.

c. Une définition récursive des polynômes de Bernstein.

Démontrer que pour tout entier naturel $n > 1$ et tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, nous avons

$$B_{n,k}(X) = (1-X) B_{n-1,k}(X) + X B_{n-1,k-1}(X).$$

Cette propriété nous permet de donner une définition récursive des polynômes de Bernstein en convenant que $B_{n,k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

Nous avons

$$\begin{aligned}(1-X) B_{n-1,k}(X) + X B_{n-1,k-1}(X) &= (1-X)\binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-k-1} + X \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-k} \\ &= X^k (1-X)^{n-k} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right],\end{aligned}$$

or, la formule du triangle de Pascal, nous donne

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k},$$

donc $(1-X) B_{n-1,k}(X) + X B_{n-1,k-1}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = B_{n,k}(X)$.

2. **La famille** $\mathcal{B}_n = (B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ **est une base de** $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On se propose de démontrer que la famille $\mathcal{B}_n = (B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ par deux méthodes différentes.

a. La méthode directe.

a. i. Quel est pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ le degré et la valuation de $B_{n,k}$?

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ est de degré n et de valuation k. On rappelle au passage que la valuation d'un polynôme est le degré

[1] Y. Martinez-Maure

du son monôme de plus bas degré. Ainsi, dire qu'un polynôme à une valuation nulle revient à dire que son terme constant est non nul.

a. ii. Démontrer que $\mathcal{B}_n$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ en considérant les valuations.

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \ B_{n,k}(X) = 0$. On se propose de démontrer par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ que tous les coefficients λ_k sont nuls. En évaluant la fonction $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \ B_{n,k}(t)$ en $t = 0$, il vient $\lambda_0 B_{n,0}(0) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_0 = 0$ puisque $B_{n,0}(0) = 1$. Supposons que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on ait $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0$. Nous avons alors $\sum_{l=k+1}^{n} \lambda_l \ B_{n,l}(X) = 0$, et donc $t^{k+1} P(t) = 0$, où

$$P(t) = \sum_{l=k+1}^{n} \lambda_l \binom{n}{l} t^{l-(k+1)} (1-t)^{n-l}.$$

On en déduit que $P(t) = 0$ pour tout $t \neq 0$ et donc que $P(0) = 0$ par continuité de P en 0. Or, pour tout $l \in [\![k+2, n]\!]$, le polynôme $\binom{n}{l} X^{l-(k+1)} (1-X)^{n-l}$ est de valuation ≥ 1, donc

$$P(0) = \lambda_{k+1} \binom{n}{k+1} 0^0 (1-0)^{n-(k+1)},$$

et donc $\lambda_{k+1} = 0$ puisque $\binom{n}{k+1} 0^0 (1-0)^{n-(k+1)} \neq 0$.

Par conséquent, on a bien démontré par récurrence sur k que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En conclusion, la famille $\mathcal{B}_n$ est bien une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

a. iii. En déduire que $\mathcal{B}_n$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme $\mathcal{B}_n$ est une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$, on en déduit que $\mathcal{B}_n$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Le recours à un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\varphi_n(P)(X) := nXP(X) + X(1-X)P'(X),$$

où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$.

b.i. Vérifier que φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'il vérifie, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_n(B_{n,k}) = kB_{n,k}$.

Nous savons que :
$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda P + \mu Q)'(X) = \lambda P'(X) + \mu Q'(X).$

Il s'ensuit que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_n(\lambda P + \mu Q)(X) &= nX(\lambda P(X) + \mu Q(X)) + X(1-X)(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) \\ &= \lambda(nXP(X) + X(1-X)P'(X)) + \mu(nXQ(X) + X(1-X)Q'(X)) \\ &= \lambda\varphi_n(P)(X) + \mu\varphi_n(Q)(X). \end{aligned}$$

[1] Y. Martinez-Maure

Ainsi φ_n est bien $\mathbb{R}$-linéaire.

Par ailleurs, nous pouvons décomposer $\mathbb{R}_n[X]$ en la somme directe $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus Vect(\{X_n\})$. Or, il est immédiat que $\varphi_n(\mathbb{R}_{n-1}[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ et nous avons $\varphi_n(X^n) = nXX^n + X(1-X)nX^{n-1} = nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\varphi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par ailleurs, on a : $\varphi_n(B_{n,0})(X) = nX(1-X)^n - X(1-X)n(1-X)^{n-1} = (nX-nX)(1-X)^n = 0$, $\varphi_n(B_{n,n})(X) = \varphi_n(X^n) = nX^n$ et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(B_{n,k})(X) &= nXB_{n,k}(X) + X(1-X)B'_{n,k}(X) \\
&= nX\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} + X(1-X)\binom{n}{k}\left[kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right] \\
&= nX\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} + \binom{n}{k}\left[kX^k(1-X)^{n-k+1} - (n-k)X^{k+1}(1-X)^{n-k}\right] \\
&= \binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}(nX + k(1-X) - (n-k)X) = kB_{n,k}(X).
\end{aligned}$$

On a donc bien $\varphi_n(B_{n,k}) = kB_{n,k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

b.ii. En déduire que $\mathcal{B}_n = (B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que l'endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonalisable.

Nous venons de montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $B_{n,k}$ est un vecteur (ici un polynôme) propre de l'endomorphisme φ_n associé à la valeur propre k. Autrement dit, les polynômes $B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n}$ sont des vecteurs propres de φ_n associés aux valeurs propres respectives 0, 1, ..., n, et donc à des valeurs propres deux à deux distinctes. Il s'ensuit que ces polynômes sont linéairement indépendants. En d'autres termes, $(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est un famille libre. Comme il s'agit d'une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$, on en déduit que $\mathcal{B}_n = (B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme il existe une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ_n, nous pouvons affirmer que φ_n est diagonalisable.

b.iii. L'endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ est-il bijectif ?

Comme 0 est valeur propre de φ_n, l'endomorphisme φ_n n'est pas injectif et donc pas bijectif.

c. Application à l'étude de $B_n : P \mapsto \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X)$.

c. i. Démontrer que l'on définit un endomorphisme B_n de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant

$$B_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X) \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X].$$

[1] Y. Martinez-Maure

On démontre comme pour φ_n que B_n est bien une application linéaire. D'autre part, il est immédiat que : $\mathrm{Im}\,(B_n) \subset Vect\,(\{B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n}\}) = \mathbb{R}_n\,[X]$. Par conséquent, B_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n\,[X]$.

c. **ii**. Cet endomorphisme est-il bijectif ?

Déterminons le noyau de cet endomorphisme. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $B_n(P) = 0$ impose $\left(\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ P\left(\frac{k}{n}\right) = 0\right)$ car $\mathcal{B}_n = (B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n\,[X]$. Donc, si $P \in Ker\,(B_n)$, alors P admet $n+1$ racines distinctes. Comme $\deg\,(P) \leq n$, cela impose à P d'être le polynôme nul. Par conséquent, $Ker\,(B_n) = \{0\}$, et donc l'endomorphisme B_n de $\mathbb{R}_n\,[X]$ est injectif. Comme l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n\,[X]$ est de dimension finie, on en déduit que B_n est bijectif.

Partie B. Les polynômes de Bernstein et les probabilités

Considérons une variable aléatoire Y qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

1. a. Donner un exemple de situation probabiliste pouvant être décrit par une telle loi.

La loi binomiale $\mathcal{B}\,(n, p)$ est la loi du nombre de succès obtenus en la suite de n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli avec pour chacune la même probabilité de succès égale à p. En d'autres termes, une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p peut s'écrire comme la somme $X_1 + \cdots + X_n$ de n variables aléatoires définies sur le même espace, indépendantes et suivant toutes une loi de Bernouilli de paramètres p (i.e., à valeurs dans $\{0, 1\}$, les événements $\{X = 1\}$ et $\{X = 0\}$, respectivement appelés succès et échec, étant de probabilité respectives p et $1 - p$).

Une situation probabiliste pouvant être décrite par une telle loi est donc celle d'un schéma de Bernoulli, à savoir de la succession de n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli (i.e. de la même expérience aléatoire ayant deux issues possibles : le succès et l'échec) avec une même probabilité de succès égale à p. On peut par exemple penser au tirage avec remise de n boules dans une urne contenant une proportion p de boules blanches (succès) et $1 - p$ de boules noires (échec). Le nombre X de boules blanches obtenues suit alors une loi binomiale de paramètres n et p

b. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, que représente alors $B_{n,k}\,(p)$ en termes probabilistes ?

Une variable aléatoire Y qui suit une loi binomiale de paramètres n et p est une variable aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ dont la loi de probabilités P est donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,, \quad P\,(\{Y = k\}) = \binom{n}{k} p^k\,(1 - p)^{n-k} = B_{n,k}\,(p)\,.$$

(Remarquons que cette relation définit bien une loi de probabilité car tous les $B_{n,k}\,(p)$ sont positifs et $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\,(p) = 1$: voir $A.1.a.b.$). En effet, en reprenant les notations précédentes,

[1] Y. Martinez-Maure

$$P(\{Y=k\}) = P\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k = k\right\}\right)$$

or, l'événement $\{\sum_{k=1}^{n} X_k = k\}$ est l'union disjointe des k parmi n événements élémentaires $\{(e_1, \ldots, e_n)\}$, où k des e_i sont égaux à 1 et $n-k$ des e_i sont égaux à 0, et la probabilité de chacun de ces événements $\{(e_1, \ldots, e_n)\}$ est égale à $p^k(1-p)^{n-k}$, donc par additivité de la probabilité $P(\{Y=k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = B_{n,k}(p)$.

2. **a**. Que représentent les sommes $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(p)$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(p)$ pour Y ?

Les sommes $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(p)$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(p)$ représentent respectivement l'espérance de Y et l'espérance de son carré Y^2.

b. Rappeler comment il est possible d'exprimer $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(p)$ en fonction de n et de p

b. **i**. En utilisant le calcul de l'espérance de Y.

Reprenons les notations introduites dans la correction de la question 1. Comme $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$, il vient par linéarité de l'espérance

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np.$$

b. **ii**. Par un calcul direct.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la formule du binôme nous donne $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. En dérivant par rapport à x, puis en multipliant par x, on obtient :

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

En prenant $x = p$ et $y = 1-p$, on obtient ainsi :

$$np(p+1-p)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(p) \ ;$$

c'est-à-dire $E(Y) = \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(p) = np$.

c. Quelle est la variance de Y ? Rappeler comment on peut la calculer.

Reprenons les notations introduites dans la correction de la question 1. On a $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, donc :

$$V(Y) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

d. **i**. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(p)$ en fonction de n et de p.

En vertu de la formule de Koenig-Huygens, nous avons :

[1] Y. Martinez-Maure

$$V(Y) = E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 .$$

Compte tenu des résultats des questions précédentes, on en déduit directement que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(p) = E\left(Y^2\right) = V(Y) + E(Y)^2 = np(1-p) + (np)^2 = np + n(n-1)p^2.$$

d. **ii**. Comment aurait-on pu établir ce résultat directement ? (c'est-à-dire par un calcul n'utilisant pas celui de la variance de Y).

En dérivant par rapport à x, puis en multipliant par x, dans la relation

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k},$$

qui est vérifiée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (voir la correction du *b*), il vient :

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

(remarquer que dans cette dernière somme, les termes correspondant à $k = 0$ et $k = 1$ sont tous les deux nuls). En prenant $x = p$ et $y = 1 - p$, on obtient ainsi :

$$n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(p) - \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(p),$$

et donc $E\left(Y^2\right) = \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(p) = E(Y) + n(n-1)p^2 = np + n(n-1)p^2$.

Partie C. Les polynômes de Bernstein et la géométrie

On se place dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Étant donné un entier naturel n, on se donne un $(n+1)$-uplet $\mathbf{P} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de points de $\mathcal{P}$.

On appelle courbe de Bézier de degré n associée à $\mathbf{P}$, la courbe de $\mathcal{P}$ qui est paramétrée par

$$f_{\mathbf{P}} : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathcal{P} \\ t \mapsto M(t), \end{array}$$

où $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) \overrightarrow{OP_k}$. Cette courbe de Bézier de $\mathcal{P}$ sera noté $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ et on dit que les points $P_0, P_1, \ldots, P_n$ en sont les $n+1$ points de contrôle.

[1] Y. Martinez-Maure

1. Premières propriétés.

a. Cette définition d'une courbe de Bézier de $\mathcal{P}$ est-elle correcte ? En d'autres termes, est-ce qu'elle dépend du choix du repère $\mathcal{R}$, et en particulier de celui du point O ? Peut-on l'exprimer en termes de barycentre ?

La relation vectorielle $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\,\overrightarrow{OP_k}$ signifie que $M(t)$ est le barycentre du système de points pondérés $((P_0; B_{n,0}(t)), \ldots, (P_n; B_{n,n}(t)))$. Ce barycentre existe car le poids total du système est égale à 1 (les polynômes de Bernstein d'un même degré forment une partition de l'unité en vertu du A.1.b). La définition ne dépend donc pas du choix du repère ni de celui de O.

b. **i**. Déterminer $f_{\mathbf{P}}(0)$ et $f_{\mathbf{P}}(1)$.

On a : $f_{\mathbf{P}}(0) = P_0$ et $f_{\mathbf{P}}(1) = P_1$ car $B_{n,0}(0) = B_{n,n}(1) = 1$ et $(B_{n,k}(0) = 0$ si $k \neq 0)$ et $(B_{n,k}(1) = 0$ si $k \neq n$).

b. **ii**. Pour tout $t \in [0,1]$, exprimer les coordonnées $(x(t), y(y))$ de $M(t)$ dans $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées respectives (x_0, y_0), …,(x_n, y_n) des $n+1$ points de contrôles $P_0, \ldots, P_n$.

Comme $f_{\mathbf{P}}(t) = bar\,((P_0; B_{n,0}(t)), \ldots, (P_n; B_{n,n}(t)))$, on a immédiatement :

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\, x_k \\ y(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\, y_k \end{cases}.$$

b. **iii**. Démontrer chacune des deux propriétés suivantes :

(I) Pour tout $t \in [0,1]$, $f_{\mathbf{P}}(t)$ est un point de l'enveloppe convexe de $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$;

Comme $f_{\mathbf{P}}(t) = bar\,((P_0; B_{n,0}(t)), \ldots, (P_n; B_{n,n}(t)))$, c'est une conséquence immédiate du fait que tous les poids sont positifs.

(II) Pour toute transformation affine $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $\phi(\mathcal{B}(\mathbf{P})) = \mathcal{B}(\phi(\mathbf{P}))$, où $\phi(\mathbf{P})$ désigne le $(n+1)$-uplet $(\phi(P_0), \phi(P_1), \ldots, \phi(P_n))$.

Toute transformation affine conserve les barycentres, par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(f_{\mathbf{P}}(t)) &= \phi(bar\,((P_0; B_{n,0}(t)), \ldots, (P_n; B_{n,n}(t)))) \\ &= bar\,((\phi(P_0); B_{n,0}(t)), \ldots, (\phi(P_n); B_{n,n}(t))) \\ &= f_{\phi(\mathbf{P})}(t), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Étude d'un exemple et construction par points et tangentes.

2. **a.** On considère dans le plan $\mathcal{P}$, le triplet de points non alignés $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$, où P_0, P_1 et P_2 sont les points de coordonnées respectives $(-1, 3)$, $(1, -1)$ et $(3, 2)$. Pour tout $t \in [0,1]$, on définit les points $M_1(t)$, $M_2(t)$ et $M(t)$ par les égalités vectorielles suivantes :

[1] Y. Martinez-Maure

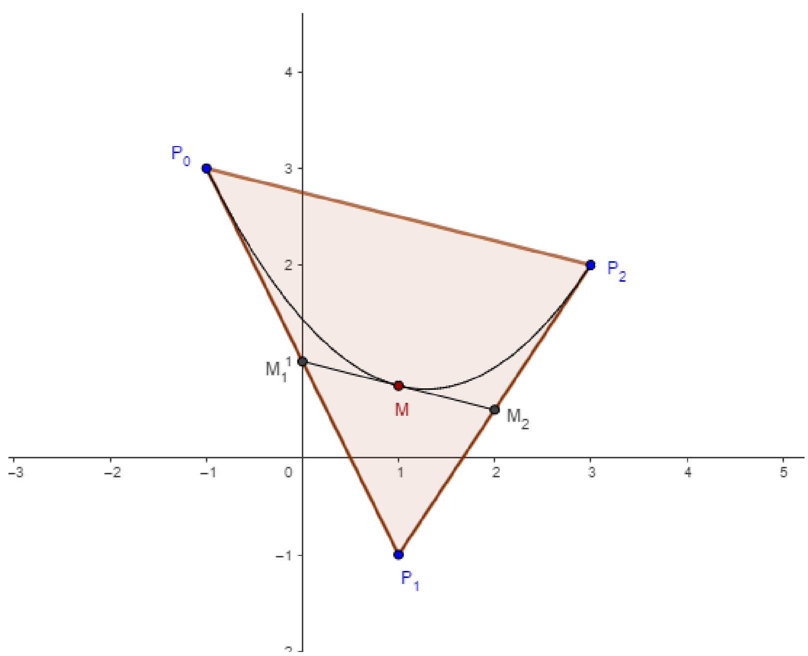
- $\overrightarrow{OM_1(t)} = B_{1,0}(t)\,\overrightarrow{OP_0} + B_{1,1}(t)\,\overrightarrow{OP_1}$;
- $\overrightarrow{OM_2(t)} = B_{1,0}(t)\,\overrightarrow{OP_1} + B_{1,1}(t)\,\overrightarrow{OP_2}$;
- $\overrightarrow{OM(t)} = B_{1,0}(t)\,\overrightarrow{OM_1(t)} + B_{1,1}(t)\,\overrightarrow{OM_2(t)}$.

2. a. i. Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, le point $M(t)$ que nous venons d'introduire n'est autre que le point $f_{\mathbf{P}}(t)$, où $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$. Le lieu de $M(t)$ lorsque t décrit le segment $[0,1]$ est donc la courbe de Bézier d'ordre 2 associée à $\mathbf{P}$.

Des relations vectorielles données, on déduit en effet que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}(t) &= B_{1,0}(t)\left(B_{1,0}(t)\,\overrightarrow{OP_0} + B_{1,1}(t)\,\overrightarrow{OP_1}\right) + B_{1,1}(t)\left(B_{1,0}(t)\,\overrightarrow{OP_1} + B_{1,1}(t)\,\overrightarrow{OP_2}\right)\\ &= (1-t)\left((1-t)\,\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1}\right) + t\left((1-t)\,\overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{OP_2}\right)\\ &= (1-t)^2\,\overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t)\,\overrightarrow{OP_1} + t^2\overrightarrow{OP_2} = \sum_{k=0}^{2} B_{2,k}(t)\,\overrightarrow{OP_k}\end{aligned}$$

2. a. ii. Avec le module de géométrie dynamique, tracer les points P_0, P_1, P_2 et le lieu des points $M_1(t)$, $M_2(t)$ et $M(t)$ lorsque t décrit le segment $[0,1]$. Que peut-on conjecturer au sujet de la position de chacune des droites (P_0P_1), (P_1P_2) et $(M_1(t)\,M_2(t))$ pour tout $t \in [0,1]$, par rapport à la courbe de Bézier d'ordre 2 associée à $\mathbf{P}$? Vérifier que cette conjecture semble encore vérifiée si l'on remplace $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$ par d'autres triplets de points non alignés $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2)$.



[1] Y. Martinez-Maure

En observant ce tracé et plus encore ceux que l'on obtient en faisant varier les sommets du triangle, on peut conjecturer que le lieu des points $M(t)$ lorsque t décrit le segment $[0,1]$ admet la droite (P_0P_1) pour tangente en P_0, la droite (P_1P_2) pour tangente en P_2 et la droite $(M_1(t)\,M_2(t))$ pour tangente en $M(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

2. b. i. Déterminer un système d'équations paramétriques de cette courbe $\mathcal{B}(\mathbf{P})$.

En utilisant le résultat de la question 1.b.ii. on obtient immédiatement :

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ \\ y = 3 - 8t + 7t^2 \end{cases}$$

2. b. ii.Vérifier la conjecture émise au 2.i dans le cas particulier du triplet $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$.

La courbe est de classe C^∞ sur $[0,1]$ car les fonctions $x(t) = -1 + 4t$ et $y(t) = 3 - 8t + 7t^2$ le sont comme fonctions polynomiales. Pour tout $t \in [0,1]$, nous savons que si le vecteur vitesse

$$\overrightarrow{V(t)} = x'(t)\,\overrightarrow{i} + y'(t)\,\overrightarrow{j}$$

est non nul, alors $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ admet une tangente en $M(t)$ qui est dirigée par ce vecteur. Or, $\overrightarrow{V(t)} = 4\overrightarrow{i} + (14t-8)\,\overrightarrow{j} \neq \overrightarrow{0}$ et le calcul donne immédiatement $\overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)} = 2\overrightarrow{i} + (7t-4)\overrightarrow{j}$ si bien que $\overrightarrow{V(t)} = 2\overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)} \neq \overrightarrow{0}$. Donc, $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ admet une tangente en $M(t)$ et celle-ci n'est autre que la droite $(M_1(t)\,M_2(t))$. En particulier, $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ admet une tangente en $M(0) = P_0$ (resp. en $M(1) = P_2$) qui n'est autre que la droite $(M_1(0)\,M_2(0)) = (P_0P_1)$ (resp. la droite $(M_1(1)\,M_2(1)) = (P_1P_2)$.

2. c. Démontrer que, dans le cas général d'une courbe de Bézier d'ordre 2 associée à un triplet de points non alignés **quelconque** $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2)$ de $\mathcal{P}$, la courbe de Bézier $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ admet la droite (P_0P_1) pour tangente en P_0 et la droite (P_1P_2) pour tangente en P_2.

Le calcul de la dérivée des polynômes de Bernstein de degré 2 nous donne pour tout $t \in [0,1]$,

$$B'_{2,0}(t) = -2(1-t)\,,\; B'_{2,1}(t) = 2 - 4t,\;\; B'_{2,2}(t) = 2t.$$

Il s'ensuit que $B'_{2,0}(0) = -2$, $B'_{2,1}(0) = 2$, $B'_{2,2}(0) = 0$ et $B'_{2,0}(1) = 0$, $B'_{2,1}(1) = -2$, $B'_{2,2}(1) = 2$, ainsi le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)} = x'(t)\,\overrightarrow{i} + y'(t)\,\overrightarrow{j} = \sum_{k=0}^{n} B'_{n,k}(t)\,x_k\,\overrightarrow{i} + \sum_{k=0}^{n} B'_{n,k}(t)\,y_k\,\overrightarrow{j}$ est tel que

$$\begin{cases} \overrightarrow{V(0)} = 2(x_1 - x_0)\,\overrightarrow{i} + 2(y_1 - y_0)\,\overrightarrow{j} = 2\overrightarrow{P_0P_1} \\ \\ \overrightarrow{V(1)} = 2(x_2 - x_1)\,\overrightarrow{i} + 2(y_2 - y_1)\,\overrightarrow{j} = 2\overrightarrow{P_1P_2}. \end{cases}$$

[1]Y. Martinez-Maure

Il en résulte que la courbe de Bézier $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ admet bien la droite (P_0P_1) pour tangente en P_0 et la droite (P_1P_2) pour tangente en P_2.

Partie D. Les polynômes de Bernstein et l'analyse

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème d'approximation de Weierstrass en utilisant les polynômes de Bernstein :

Théorème d'approximation de Weierstrass. *Toute fontion réelle définie et continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur ce segment.*

1. Résultats techniques préliminaires.

1. a. Démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$.

On a : $\frac{1}{4} - t(1-t) = \frac{1}{4}\left(1-4t+4t^2\right) = \frac{1}{4}(1-2t)^2 \geq 0$, d'où le résultat.

1. b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nt)^2 B_{n,k}(t) = nt(1-t).$$

On pourra utiliser les résultats obtenus aux questions $A.1.b$ et $B.2$.

Nous avons vu que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(t) = nt,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(t) = nt + n(n-1)t^2.$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nt)^2 B_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(t) - 2nt\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(t) + (nt)^2 \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t),$$

donc : $\sum_{k=0}^{n} (k-nt)^2 B_{n,k}(t) = nt + n(n-1)t^2 - 2(nt)^2 + (nt)^2 = nt(1-t)$.

1. c. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(t) \leq \frac{1}{4n}.$$

Il découle du b que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(t) = \frac{t(1-t)}{n},$$

[1] Y. Martinez-Maure

puis du a que :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^{2}B_{n,k}(t)\leq\frac{1}{4n}.$$

2. **a**. On considère une fontion réelle f définie et continue sur $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ et n un entier ≥ 1. Pour tout $t\in[0,1]$, on pose :

$$B_n(f)(t):=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(t).$$

Démontrer que, pour tout $t\in[0,1]$, on a :

$$|f(t)-B_n(f)(t)|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t).$$

On a :

$$\begin{aligned}
|f(t)-B_n(f)(t)| &= \left|f(t)-\textstyle\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(t)\right|\\
&= \left|f(t)\textstyle\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(t)\right|\\
&= \left|\textstyle\sum_{k=0}^{n}\left(f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(t)\right|\\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^{n}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t).
\end{aligned}$$

2. **b**. Démontrer que la fonction f est bornée sur $[0,1]$ et qu'elle vérifie :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall(x,y)\in[0,1]^2,\ |x-y|\leq\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est nécessairement bornée sur ce segment et, d'autre part, uniformément continue sur ce segment en vertu du théorème de Heine. Par conséquent, il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $|f(t)|\leq M$ pour tout $t\in[0,1]$ et il existe un réel $\alpha>0$, tel que : $\forall(x;y)\in[0,1]^2$, $|x-y|\leq\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

2. **c**. **i**. Pour tout $\varepsilon>0$ et tout $t\in[0,1]$, posons $K_\varepsilon(t)=\{k\in[\![0,n]\!]\,||k-nt|\leq n\alpha\}$. Démontrer que :

$$\sum_{k\in K_\varepsilon(t)}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t)\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $k\in K_\varepsilon(t)$, on a $\left|\frac{k}{n}-t\right|\leq\alpha$ et donc $\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ d'après le b. Par conséquent :

[1] Y. Martinez-Maure

$$\sum_{k\in K_\varepsilon(t)}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t)\le\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in K_\varepsilon(t)}B_{n,k}(t)\le\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)=\frac{\varepsilon}{2},$$

sachant que les fonctions $B_{n,k}$ sont positives sur $[0,1]$ et que $\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)=1$ (voir A.1).

2. **c**. **ii**. On pose : $M=\sup_{t\in[0,1]}\left(\{|f(t)|\}\right)$. Pour tout $\varepsilon>0$ et tout $t\in[0,1]$, posons $L_\varepsilon(t)=\{k\in[\![0,n]\!]\,||k-nt|>n\alpha\}$. Démontrer que :

$$\sum_{k\in L_\varepsilon(t)}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t)\le\frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}(t)\ .$$

On a : $\sum_{k\in L_\varepsilon(t)}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t)\le\sum_{k\in L_\varepsilon(t)}\left(|f(t)|+\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)B_{n,k}(t)\le 2M\sum_{k\in L_\varepsilon(t)}B_{n,k}(t)\ \le\ 2M\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)$. Or, pour tout $k\in L_\varepsilon(t)$, on a $|k-nt|>n\alpha$ et donc

$$1<\frac{\left(t-\frac{k}{n}\right)^2}{\alpha^2}$$

Par conséquent, on a bien :

$$\sum_{k\in L_\varepsilon(t)}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t)\le\frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}(t)\,.$$

2. **c**. **iii**. En déduire que :

$$\sum_{k\in L_\varepsilon(t)}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t)\le\frac{M}{2n\alpha^2}\ .$$

On a vu au 1 que : $\sum_{k=0}^{n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}(t)\ \le\ \frac{1}{4n}$. Cela permet immédiatement de déduire l'inégalité souhaitée du c.

2. **d**. En déduire qu'il existe un $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-B_n(f)(t)|\le\varepsilon.$$

On déduit des résultats des questions 1 et 2 que, pour tout $t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}|f(t)-B_n(f)(t)|\ &\le\textstyle\sum_{k\in K_\varepsilon(t)}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t)+\sum_{k\in L_\varepsilon(t)}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(t)\\ &\le\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{M}{2n\alpha^2}\,,\end{aligned}$$

[1]Y. Martinez-Maure

or, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{2n\alpha^2}=0$, ce qui nous garantit l'existence d'un entier N tel que $\frac{M}{2n\alpha^2}\leq\frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n\geq N$. Pour tout $n\geq N$, on a donc : (pour tout $t\in[0,1]$, $|f(t)-B_n(f)(t)|\leq\varepsilon$), et donc :

$$\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-B_n(f)(t)|\leq\varepsilon.$$

2. **e**. Qu'est-ce que cela signifie pour la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Cela prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-B_n(f)(t)|\right)=0,$$

ou en d'autres termes que la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

3. Supposons maintenant que f est une fonction définie et continue sur un segment $[a,b]$, où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ est tel que $a<b$. Considérons la transformation affine $\psi:[0,1]\to[a,b]$ définie par $\psi(t):=a+(b-a)t$ pour tout $t\in[0,1]$ et notons g la fonction $f\circ\psi$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $P_n(t)=\left(B_n(g)\circ\psi^{-1}\right)(t)$. Démontrer que la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur le segment $[a,b]$.

La fonction $g=f\circ\psi$ est définie et continue sur $[0,1]$ comme composée de fonctions continues. D'après les résultats du 2, la suite de fonctions $(B_n(g))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$. L'application ψ étant une bijection de $[0,1]$ sur $[a,b]$, nous avons :

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|=\sup_{t\in[0,1]}|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))|=\sup_{t\in[0,1]}|g(t)-B_n(g)(t)|.$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-B_n(f)(t)|\right)=0,$$

ce qui prouve le théorème d'approximation de Weierstrass.

3. ii. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b P_n(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt.$$

Comme la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur le segment $[a,b]$, nous pouvons échanger le symbole de passage à la limite et le symbole de sommation sur $[a,b]$, ce qui nous donne le résultat :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b P_n(t)\,dt=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}P_n(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt.$$

[1] Y. Martinez-Maure