

New insights on marginally trapped surfaces: the hedgehog point of view

Y. Martinez-Maure

Institut Mathématique de Jussieu, Paris-Rive Gauche

Séminaire de géométrie-22 janvier 2018

Le papier et l'objectif

Cet exposé est tiré d'un travail déposé sur HAL le 1^{er} novembre 2017 :
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01627452/document>

Le but de l'article : ■ Mettre en évidence que la géométrie métrique de contact admet comme "adjointe" une "géométrie de co-contact" ;

■ Montrer que la relation d'adjonction met en relation des entités géométriques vivant dans des espaces différents (par exemple, des hérissons de \mathbb{R}^3 et des surfaces marginalement piégées de \mathbb{L}^4).

La relation d'adjonction est héritée de la relation d'adjonction entre différentiation extérieure $d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$ et codifférentiation $\delta := d^* = (-1)^p *^{-1} d* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$:

géométrie métrique de contact	\longleftrightarrow	géométrie de co-contact
d	\longleftrightarrow	$\delta := d^*$

Le choix de présentation

Plutôt que de me lancer dans une présentation générale, je choisis d'axer la présentation sur un exemple fondamental et de montrer comment ces géométries mettent en relation des entités géométriques bien connues et comment elles se manifestent et s'articulent dans ce cadre.

géométrie métrique de contact \longleftrightarrow géométrie de co-contact
Les hérissons de \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow Les "hérissons marginalement piégés" de \mathbb{L}^4

où $\mathbb{L}^4 = (\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$, avec $\langle (x; t), (x'; t') \rangle_L := x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 - t t'$
pour tous $(x; t) := ((x_1, x_2, x_3), t)$ et $(x'; t') := ((x'_1, x'_2, x'_3), t')$ de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Remarque. Nous pouvons remplacer \mathbb{R}^3 par \mathbb{R}^{n+1} , la dimension n'est fixée égale à trois que pour simplifier la présentation.

Pour une présentation plus générale

Pour d'autres exemples et pour

- des idées générales sur la manière dont on pourrait développer une géométrie de co-contact en relation d'adjonction avec la géométrie métrique de contact

et

- sur l'intérêt que cela peut avoir aussi bien en géométrie (liens avec la géométrie de Laguerre, avec la théorie de Brunn-Minkowski, etc) qu'en physique (gravitation, étude des trous noirs),

je vous renvoie à l'article déposé sur HAL

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01627452/document>

et aux références qui s'y trouvent.

Première présentation synthétique

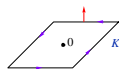
Hérissons de \mathbb{R}^3	Hérissons marginalement piégés de \mathbb{L}^4
<p>On peut y penser comme à des enveloppes paramétrées par leur application de Gauss</p> <p>Définis par une fonction de support $h \in C^\infty(S^2; \mathbb{R})$ via une condition de contact</p>	<p>On peut y penser comme à des "co-envelopes" paramétrées par la direction de leur vecteur de courbure moyenne</p> <p>Définis par une "différentielle de support" dh, où $h \in C^\infty(S^2; \mathbb{R})$ via une condition de co-contact</p>

Rappelons qu'il ne s'agit que d'un exemple fondamental :

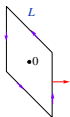
De nombreuses généralisations sont possibles (autres dimensions, espace ambiant des hérissons autres qu'un espace euclidien, "multihérissons" au lieu de hérissons, etc).

Les hérissons généraux de l'espace euclidien

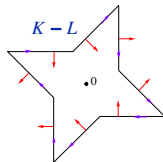
Les hérissons sont les objets géométriques qui représentent les différences formelles de corps convexes quelconques dans \mathbb{R}^{n+1} (Y.M², Canad. J. Math. 58, 2006).



—



—
—



$$h_K(x_1, x_2) := |x_1| + \frac{|x_1 + x_2|}{\sqrt{2}}$$

$$h_L(x_1, x_2) := \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{2}} + |x_2|$$

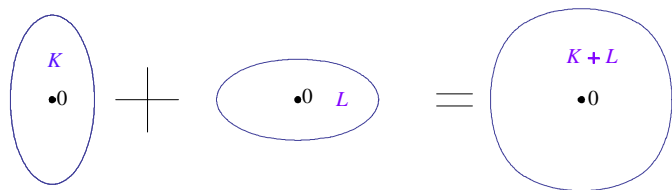
$$h_{K-L} := h_K - h_L.$$

L'idée de considérer de telles différences de Minkowski de corps convexes remontent à des articles de A.D. Alexandrov et H. Geppert dans les années 1930.

De nombreuses notions et résultats relatifs aux corps convexes s'étendent au moins partiellement aux hérissons. Naturellement des adaptations sont nécessaires. Par exemple, les volumes doivent être remplacés par des volumes algébriques.

Somme de Minkowski. Différence de Minkowski ?

- Addition de Minkowski : Pour tous corps convexes $K, L \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $K + L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$ est encore un corps convexe.



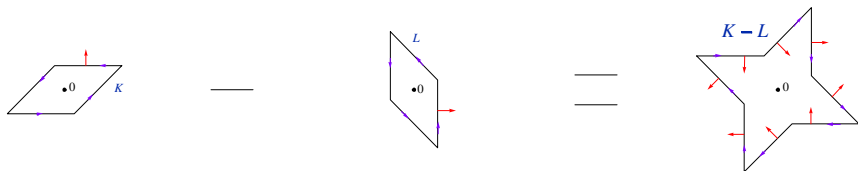
- Existe-t-il une opération inverse (une manière raisonnable de soustraire les corps convexes) ?

\hookrightarrow En général, pas de corps convexe H tel que $L + H = K$.

\hookrightarrow Dans le cadre étendu des « hérissons » qui conserve une grand part des propriétés des convexes, la « différence de Minkowski » $M := K - L$ existe toujours géométriquement !

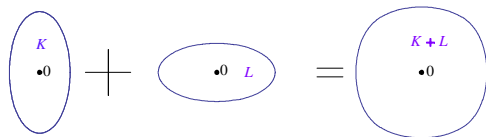
Hedgehogs as differences of arbitrary convex bodies

- Soit $(\mathcal{K}^{n+1}, +, \cdot)$ l'ensemble des corps convexes de \mathbb{R}^{n+1} muni de l'addition de Minkowski et de la multiplication par les réels ≥ 0 :
 $K + L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$; $\lambda.K = \{\lambda x \mid x \in K\}$.
- Ce n'est pas un espace vectoriel : pas de soustraction dans \mathcal{K}^{n+1} .
- Les différences formelles $K - L$ constituent bien un e.v. $(\mathcal{H}^{n+1}, +, \cdot)$.
- Toute différence formelle $K - L$ de deux corps convexes $K, L \in \mathcal{K}^{n+1}$ admet une représentation sympathique dans \mathbb{R}^{n+1} , (Y.M.², Canad. J. Math 2006).



(Par récurrence sur n , en remplaçant 'ensemble de support' par 'héroissons de support').

Les hérissons par l'intégration d'Euler



Théorème de Groemer (1977):

$$\mathbf{1}_{K+L} = \mathbf{1}_K * \mathbf{1}_L$$

Convolution des indices (par rapport à la caractéristique d'Euler) :

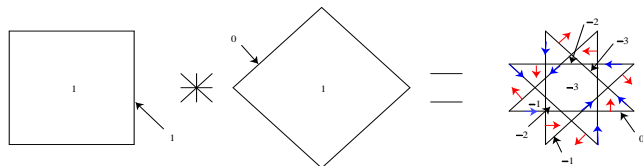
$$\boxed{(-1)^{n+1} \left(\mathbf{1}_K * \mathbf{1}_{-L} \right) (x) = \mathbf{1}_h(x)}$$

Polytopal case: Pukhlikov-Khovanskii, 1993.

Other cases: Y.M. Beitr. Alg. Geom. 2015.

Exemple. Le hérisson $\mathcal{H}_h := K - L$, où :

$h_K(x) = |\langle x, e_1 \rangle| + |\langle x, e_2 \rangle|$, $h_L(x) = |\langle x, e_3 \rangle| + |\langle x, e_4 \rangle|$, ($x \in \mathbb{R}^2$) ;
 (e_1, e_2) base canonique de \mathbb{R}^2 , $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$.



Cas des hypersurfaces à courbure de Gauss > 0

Soustraire deux hypersurfaces à courbure de Gauss > 0 de \mathbb{R}^{n+1} revient à soustraire leurs points respectifs qui correspondent à un même vecteur normal sortant pour obtenir une hypersurface hérisson (pouvant se recouper et présenter des singularités) :

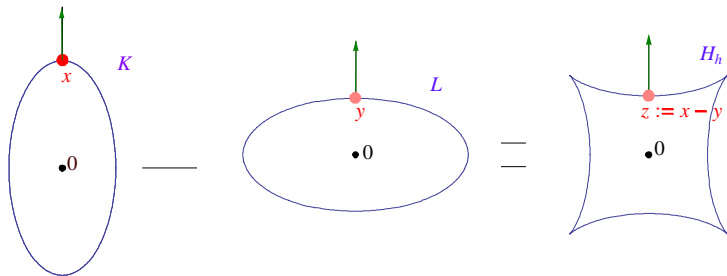
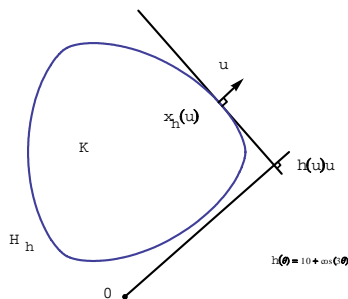


Figure : Les hérissons C^2 comme différences de corps convexes C_+^2

$$k(\theta) := \sqrt{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}; \quad k(\theta) := \sqrt{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}; \quad (\theta \in [0, 2\pi]); \quad h := k - l$$

Fonctions de support

Soit $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un corps convexe (i.e., compact et convexe $\neq \emptyset$). K est déterminé par sa fonction de support $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \max_{x \in K} \langle x, u \rangle$.



Si K est C_+^2 , alors ∂K est déterminé par $h \in C^2(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ comme enveloppe $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de la famille d'hyperplans $\langle x, u \rangle = h(u)$, ($u \in \mathbb{S}^n$).

Paramétrisation des hérissons C2

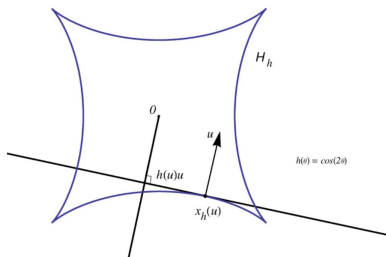
La paramétrisation de l'enveloppe \mathcal{H}_h des hyperplans d'équation $\langle x, u \rangle = h(u)$ associée à tout $u \in \mathbb{S}^n$, l'unique solution de

$$\begin{cases} (1) & \langle x, u \rangle = h(u) \\ (2) & \langle x, \cdot \rangle = dh_u(\cdot) \end{cases} \quad \left[(2) \text{ se déduit de (1) via la condition de contact } \langle dx, u \rangle = 0 \right],'$$

soit $x_h(u) = h(u)u + (\nabla h)(u)$. En fait, $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^n)$ est définie pour tout $h \in C^2(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$. \mathcal{H}_h est appelé **hérisson** de fonction support h .

Langevin-Levitt-Rosenberg, 1988

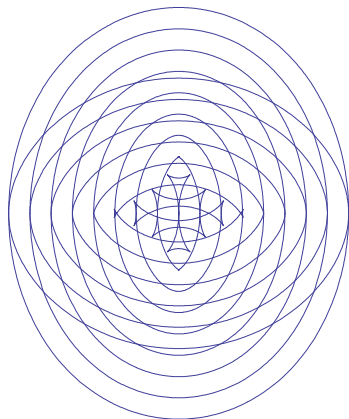
En tout point $x_h(u) \in \mathcal{H}_h$
 u est normal à \mathcal{H}_h



Hérissons parallèles

Ces hérissons C^2 peuvent s'envisager comme des hypersurfaces parallèles à des hypersurfaces convexes de classe C_+^2 .

Les hérissons parallèles à un hérisson donné \mathcal{H}_h constituent la famille de hérissons $(\mathcal{H}_{h+t})_{t \in \mathbb{R}}$.



Les hérissons comme fronts legendriens

Si l'on pose
$$\alpha_{(x,u)} := \langle u, dx \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} u_i dx_i$$

pour tout $(x, u) \in U\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n$, où $(x_1, \dots, x_{n+1}; u_1, \dots, u_{n+1})$ sont les fonctions coordonnées canoniques sur $U\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n$, on a une variété de contact $(U\mathbb{R}^{n+1}; \alpha)$ et même une fibration de Legendre $\pi : U\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Les hérissons \mathbb{R}^{n+1} sont les fronts legendriens des sous-variétés legendriennes de $(U\mathbb{R}^{n+1}, \alpha)$ dont les applications de Legendre peuvent être interprétées comme l'inverse de l'application de Gauss de leur image (i.e. du front legendrien).

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{i_h} i_h(\mathbb{S}^n) \subset (U\mathbb{R}^{n+1}, \text{Ker}(\alpha))$$

$$x_h \searrow \quad \quad \downarrow \pi$$

$$\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

où $i_h(u) := (x_h(u), u)$.

Les surfaces marginalement piégées

Une surface fermée plongée de type espace dans un espace-temps de dimension 4 est dite piégée si son vecteur de courbure moyenne \vec{H} est partout de type temps.

Le cas limite des **surfaces** dites **marginalelement piégées**, i.e. des **surfaces de type espace dont le vecteur de courbure moyenne est partout de type lumière**, joue le rôle d'horizons apparents des trous noirs.

D'un point de vue mathématique, les surfaces marginalement piégées d'un espace-temps sont considérées comme des analogues lorentziens des surfaces minimales en géométrie riemannienne.

Les hérissons marginalement piégés, caractérisation

La différentielle de $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ détermine un “hérisson marginalement piégé” de $\mathbb{L}^4 := (\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$. Plus précisément, elle détermine la famille $(L_{h+t}(u))_{(u,t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}}$ de droites lumières orientées de \mathbb{L}^4 définie par :

$$\forall (u, t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \quad \boxed{L_{h+t}(u) = \{(\nabla h(u); h(u) + t)\} + \mathbb{R}(u; -1)};$$

et celle-ci détermine un “hérisson marginalement piégé” comme une “co-envelope” via une condition de “co-contact” :

Théorème 1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule application $x : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ de classe C^∞ vérifiant $x(u) \in L_{h+t}(u)$ pour tout $u \in \mathbb{S}^2$ et la condition de “co-contact”*

$$\boxed{\langle \delta(dx), u_L \rangle_L = 0},$$

où δ est la codifférentielle de Hodge sur \mathbb{S}^2 et $u_L := \frac{1}{\sqrt{2}}(u; -1)$, à savoir

$$\boxed{x = x_{l_{h+t}} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4, u \mapsto l_{h+t}(u) + \delta(\partial h)(u) u_L},$$

où $l_{h+t}(u) := (\nabla h(u); h(u) + t)$ et $\partial h(u) := dh/\sqrt{2}$;

Preuve du théorème 1 - début

In this proof, ∇_S (resp. ∇) stands for the gradient on S^2 (resp. \mathbb{R}^3), Δ_S (resp. Δ) for the Laplace-Beltrami operator on S^2 (resp. \mathbb{R}^3) and the Laplace-Beltrami operator of a vector function $X : S^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$, $u \mapsto (X_i(u))_{i=1}^4$ is understood to be the vector function $\Delta_S X : S^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$, $u \mapsto (\Delta_S X_i(u))_{i=1}^4$, where $\Delta_S X_i$ is the Laplace-Beltrami operator of the coordinate function X_i in the intrinsic metric on S^2 , ($1 \leq i \leq 4$).

For all $t \in \mathbb{R}$, let $x : S^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ be any C^∞ map such that

$$x(u) \in L_{h+t}(u) := \{l_{h+t}(u)\} + \mathbb{R}u_L$$

for all $u \in S^2$. Then there exists some $\lambda \in C^\infty(S^2; \mathbb{R})$ such that x is of the form

$$\begin{aligned} X_\lambda : S^2 &\rightarrow \mathbb{L}^4 \\ u &\mapsto (\nabla_S h(u), h(u) - t) + \lambda(u)(u, -1) \\ &= (x_h(u) + f(u)u, t - f(u)). \end{aligned}$$

where $f := \lambda - h$. For all $u \in S^2$, we have:

Preuve du théorème 1 - suite

$$\Delta_S X_\lambda(u) = (\Delta_S x_h(u) + \Delta_S(f(u)u), -(\Delta_S f)(u)).$$

Now, $\Delta_S x_h = \Delta_S(\nabla\varphi) = \Delta(\nabla\varphi) = \nabla(\Delta\varphi)$, where φ is the positively 1-homogeneous extension of h to $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, that is,

$$\varphi(x) := \|x\| h\left(\frac{x}{\|x\|}\right),$$

for $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm on \mathbb{R}^3 . Indeed, $\nabla\varphi$ is positively 0-homogeneous on $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ and equal to x_h on \mathbb{S}^2 . Thus

$$\langle \Delta_S x_h(u), u \rangle = -(\Delta\varphi)(u) = -(\Delta_S h + 2h)(u),$$

for $u \in \mathbb{S}^2$, since $\Delta\varphi$ is positively -1 -homogeneous on $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Besides, we have:

$$\begin{aligned} \Delta_S(f(u)u) &= (\Delta_S f)(u)u + 2(\langle (\nabla_S f)(u), (\nabla_S x_i)(u) \rangle)_{i=1}^3 + f(u)(\Delta_S id_{\mathbb{S}^2})(u) \\ &= (\Delta_S f - 2f)(u)u + 2(\nabla_S f)(u), \end{aligned}$$

Preuve du théorème 1 - fin

for all $u \in \mathbb{S}^2$. Therefore, we have:

$$\begin{aligned}\langle \Delta_S X_\lambda(u), u_L \rangle_L = 0 &\Leftrightarrow -(\Delta_S h + 2h)(u) + (\Delta_S f - 2f)(u) - (\Delta_S f)(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(\Delta_S h + 2h)(u) + 2(h - \lambda)(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}(\Delta_S h)(u),\end{aligned}$$

for all $u \in \mathbb{S}^2$. Thus

$$\begin{aligned}x(u) &= X_\lambda(u) = l_{h+t}(u) - \frac{(\Delta_S h)(u)}{2}(u, -1) \\ &= l_{h+t}(u) + \delta(\partial h)(u)u_L,\end{aligned}$$

for all $u \in \mathbb{S}^2$. □

Les hérissons marginalement piégés : le caractère marginalement piégé

Théorème 2. *L'application $x : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ donnée par le théorème précédent est telle que :*

- (i) $x^*g = \frac{1}{4} (R_1 - R_2)^2 g_S$, où g_S est la métrique standard sur \mathbb{S}^2 , g la première forme fondamentale sur $x(\mathbb{S}^2)$, x^*g le tiré en arrière de g le long de x et $R_1(u)$, $R_2(u)$ les rayons de courbures principaux de \mathcal{H}_h en $x_h(u)$;
- (ii) pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, tel que $x_h(u)$ n'est pas un point ombilic de \mathcal{H}_h , le vecteur de courbure moyenne de $x(\mathbb{S}^2)$ en $x(u)$, disons $\vec{H}_x(u)$, est colinéaire au vecteur lumière $\vec{u}_L = (u; -1) / \sqrt{2}$:

$$\forall u \in \mathbb{S}^2 \setminus \{u \in \mathbb{S}^2 \mid R_1(u) = R_2(u)\}, \quad \vec{H}_x(u) \in \mathbb{R}\vec{u}_L$$

Définition. *La surface de \mathbb{L}^4 paramétrée par x sera notée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et appelée hérisson marginalement piégé, ou co-hérisson, de \mathbb{L}^4 de différentielle de support $\partial h := dh / \sqrt{2}$.*

(i) We know that: $x(u) = (x_h(u), t) - R_{(1,h)}(u) (u, -1)$ for all $u \in \mathbb{S}^2$, where $R_{(1,h)} := h - \frac{\Delta h}{2} = \frac{1}{2} (R_1 + R_2)$ is the mean radius of principal curvature of \mathcal{H}_h . From this we deduce that

$$(T_u x)(v) = ((T_u x_h)(v), 0) - \left(dR_{(1,h)} \right)_u (v) (u, -1) - R_{(1,h)}(u) (v, 0);$$

and thus that

$$\langle (T_u x)(v), (T_u x)(v) \rangle_L = \left\langle (T_u x_h)(v) - R_{(1,h)}(u) v, (T_u x_h)(v) - R_{(1,h)}(u) v \right\rangle,$$

for all $v \in T_u \mathbb{S}^2$. Now, considering an orthonormal basis (e_1, e_2) of $T_u \mathbb{S}^2$ made of eigenvectors of $T_u x_h$ (i.e., $(T_u x_h)(e_i) = R_i(u) e_i$ for $i \in \{1, 2\}$), we conclude that: $\forall v \in T_u \mathbb{S}^2$,

$$(x^* g)_u (v, v) := \langle (T_u x)(v), (T_u x)(v) \rangle_L = \frac{1}{4} (R_1 - R_2)(u)^2 g_S(v, v).$$

Preuve du théorème 2 - (ii) début

(ii) We know that: $\forall u \in \mathbb{S}^2$, $x(u) = (x_h(u), t) - f(u)(u, -1)$, where $f = R_{(1,h)}$. From this, we deduce that: $\forall u \in \mathbb{S}^2$,

$$(\Delta_S x)(u) = (\Delta_S x_h(u) - \Delta_S (f(u)u), (\Delta_S f)(u)).$$

Now: $\forall u \in \mathbb{S}^2$, $\Delta_S (f(u)u) = (\Delta_S f - 2f)(u)u + 2(\nabla_S f)(u)$, (see proof of Theorem 1). Besides, $\Delta_S x_h = \Delta_S (\nabla \varphi) = \Delta (\nabla \varphi) = \nabla (\Delta \varphi)$, where φ is the positively 1-homogeneous extension of h to $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (see ib.), so that $\Delta_S x_h(u) = \nabla_S (\Delta \varphi)(u) - (\Delta \varphi)(u)u = 2(\nabla_S f(u) - f(u)u)$ for all $u \in \mathbb{S}^2$, since $\Delta \varphi$ is positively -1 -homogeneous on $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, and equal to $2f$ on \mathbb{S}^2 . Therefore: $\forall u \in \mathbb{S}^2$,

$$(\Delta_S x)(u) = -(\Delta_S f)(u)(u, -1) = -\left(\Delta_S R_{(1,h)}\right)(u)(u, -1) \in \mathbb{R}u_L.$$

We know that under a conformal change of metric $\tilde{g} = e^{2\phi}g$ on a surface M^2 , ($\psi \in C^\infty(M^2; \mathbb{R})$), the Laplace-Beltrami operator Δ_g transforms according to the formula

$$\Delta_{\tilde{g}} f = e^{-2\phi} \Delta_g f \quad \text{for all } f \in C^\infty (M^2; \mathbb{R}).$$

Above, we have proved that

$x^* g = \frac{1}{4} (R_1 - R_2) (u)^2 g_S = \left(R_{(1,h)}^2 - R_h \right) g_S$, where $R_h := R_1 R_2$ and that $(\Delta_S x) (u) = - \left(\Delta_S R_{(1,h)} \right) (u) (u, -1)$ for all $u \in \mathbb{S}^2$. Therefore

$$(\Delta_{x^* g} x) (u) = - \frac{\Delta_S R_{(1,h)}}{R_{(1,h)}^2 - R_h} (u) (u, -1)$$

outside umbilical points of \mathcal{H}_h (i.e., for $R_1(u) \neq R_2(u)$). We also know that the mean vector field of any surface $X : \Omega \subset \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$, $u \mapsto (X_i(u))_{i=1}^4$ is given by $\vec{H}_X = \frac{1}{2} (\Delta X) = \frac{1}{2} (\Delta X_i)_{i=1}^4$, where ΔX_i is the Laplace-Beltrami operator of the coordinate function in the intrinsic metric of the surface. Therefore: $\forall u \in \mathbb{S}^2 \setminus \{u \in \mathbb{S}^2 \mid R_1(u) = R_2(u)\}$,

$$\vec{H}_X (u) = - \frac{\Delta_S R_{(1,h)}}{2 \left(R_{(1,h)}^2 - R_h \right)} (u) (u, -1) \in \mathbb{R} \vec{u}_L. \quad \square$$

Majoration du déficit isopérimétrique dans le plan

Soit \mathcal{K} un corps convexe C_+^4 de \mathbb{R}^2 . Sa fonction de support est définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad h(\theta) := \max_{x \in \mathcal{K}} \langle x, u(\theta) \rangle, \quad \text{où } u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

La développée première (resp. seconde) de \mathcal{H}_h est le hérisson de fonction de support $(\partial h)(\theta) := h'(\theta - \frac{\pi}{2})$ (resp. $(\partial^2 h)(\theta) := -h''(\theta)$).

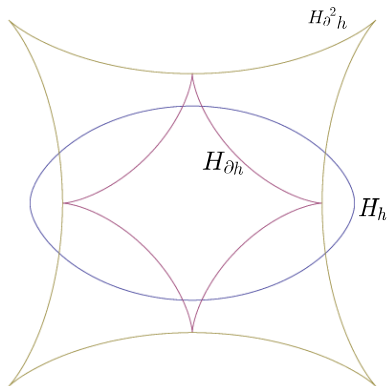
L'aire $a(h)$ et la longueur $l(h)$ de \mathcal{H}_h , l'aire $a(\partial h)$ de sa développée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et l'aire mixte $a(h, \partial^2 h)$ de \mathcal{H}_h et de sa développée seconde $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient :

$$0 \leq l(h)^2 - 4\pi a(h) \leq -4\pi a(\partial h) = -4\pi a(h, \partial^2 h). \quad (Y.M^2, 1999).$$

La 1^{ère} inégalité est l'inégalité isopérimétrique.

La seconde majore le déficit isopérimétrique $l(h)^2 - 4\pi a(h)$ de \mathcal{H}_h en fonctions de ses "courbes dérivées" $\mathcal{H}_{\partial h}$ et $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$.

Rappelons que la développée de \mathcal{H}_h est le lieu des centres de courbure de \mathcal{H}_h ou, de manière équivalente, l'enveloppe des droites normales à \mathcal{H}_h .



$$I(h) := \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta$$

$$a(h) := \int_0^{2\pi} h(\theta) (h + h'')(\theta) d\theta$$

$$a(\partial h) = -a(h, \partial^2 h) := - \int_0^{2\pi} h'(\theta) (h + h'')(\theta) d\theta$$

Un analogue en dimension supérieure

Théorème (Y.M². C.R.A.S., 2010). Soit \mathcal{K} un corps convexe de classe C_+^4 de \mathbb{R}^3 et soit $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ sa fonction de support. L'intégrale $m(h)$ de la courbure moyenne de $\mathcal{H}_h := \partial\mathcal{K}$, son aire $s(h)$ et l'aire mixte $s(h, \partial^2 h)$ de \mathcal{H}_h et de sa développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient :

$$0 \leq \frac{m(h)^2}{4\pi} - s(h) \leq -s(h, \partial^2 h).$$

La développée moyenne de \mathcal{H}_h est l'enveloppe des plans médiateurs des segments focaux $\sigma_h(u) := [c_h^1(u), c_h^2(u)]$, où $c_h^1(u), c_h^2(u)$ sont les centres de courbure principaux de \mathcal{H}_h au point de vecteur normal sortant u . C'est le hérisson $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$, où $\partial^2 h := \frac{1}{2}\Delta h$, (Δ étant Laplacien de Hodge $(d + \delta)^2$).

$$\text{Ici } m(h) = \int_{\mathbb{S}^2} h d\sigma, \quad s(h) = \underbrace{\int_{\mathbb{S}^2} R_h d\sigma}_{\int_{\mathbb{S}^2} h R_{(1,h)} d\sigma} \quad \text{et} \quad s(h, \partial^2 h) = \int_{\mathbb{S}^2} (\partial^2 h) R_{(1,h)} d\sigma$$

où σ est la mesure de Lebesgue sphérique et R_h (resp. $R_{(1,h)}$) est la fonction de courbure $1/K_h$ (resp. le rayon de courbure moyen) de \mathcal{H}_h .

Ce que la comparaison suggère

La comparaison de l'encadrement précédent avec celui obtenu dans le plan

$$0 \leq \frac{l(h)^2}{4\pi} - a(h) \leq -a(\partial h) = -a(h, \partial^2 h)$$

suggère l'existence d'une forme de "hérissou" $\mathcal{H}_{\partial h}$ de "différentielle de support" $(\partial h)(u) := (d + \delta)h/\sqrt{2}$ et "d'aire algébrique" $s(\partial h)$ telle que :

$$0 \leq \frac{m(h)^2}{4\pi} - s(h) \leq -s(\partial h) = -s(h, \partial^2 h).$$

$$\text{Or, } -s(h, \partial^2 h) := \int_{\mathbb{S}^2} \left(R_{(1,h)}^2 - R_h \right) d\sigma = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} (R_1 - R_2)^2 d\sigma$$

n'est autre que l'aire de la surface marginalement piégée décrite dans l'espace $\Sigma \approx \mathbb{L}^4$ des sphères orientées et sphères-points de \mathbb{R}^3 par la sphère moyenne $S\left(\frac{1}{2}(c_h^1 + c_h^2)(u); \frac{1}{2}(R_1 + R_2)(u)\right)$ orientée par u en $x_h(u)$, lorsque le point $u \in \mathbb{S}^2$ décrit la sphère \mathbb{S}^2 .

L'espace des sphères orientées et sphères-points

Rappelons comment \mathbb{L}^4 s'identifie à l'espace Σ des sphères orientées et sphères-points de \mathbb{R}^3 :

Pour tout $(x; r) \in \mathbb{L}^4$, on identifie $(x; r)$ à la sphère $S(x; |r|)$ orientée par son vecteur normal sortant (resp. rentrant) si $r > 0$ (resp. $r < 0$) et on identifie $(x; 0) \in \mathbb{L}^4$ à la sphère-point $\{(x, 0)\}$.

Lorsque u décrit \mathbb{S}^2 , la sphère moyenne

$$S\left(\frac{1}{2}(c_h^1 + c_h^2)(u); \frac{1}{2}(R_1 + R_2)(u)\right),$$

transversalement orientée par u en $x_h(u)$, décrit alors une surface marginalement piégée de \mathbb{L}^4 qui s'identifie au hérisson marginalement piégé $\mathcal{H}_{\partial h}$.

Tableau récapitulatif

Courbe hérisson \mathcal{H}_h dans \mathbb{R}^2	Surface hérisson \mathcal{H}_h dans \mathbb{R}^3
$\downarrow \partial$	$\downarrow \partial$
Développée $\mathcal{H}_{\partial h}$ dans \mathbb{R}^2	Surface co-développée \mathcal{H}_h dans \mathbb{L}^4 (Hérisson marginalement piégé $\mathcal{H}_{\partial h}$)
$\downarrow \partial$	$\downarrow \partial$
Développée seconde $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ dans \mathbb{R}^2	Développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ dans \mathbb{R}^3

où $\sqrt{n}\partial$ désigne l'opérateur de Hodge-Dirac $D = d + \delta$ sur S^n , avec respectivement $n = 1$ et 2 pour les courbes et les surfaces.

Enveloppes et co-enveloppes

Soit $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$.

Le hérisson \mathcal{H}_{h+t} est défini dans \mathbb{R}^3 comme l'enveloppe de la famille $(P_{h+t}(u))_{u \in \mathbb{S}^2}$ de plans co-orientés d'équation $\langle x, u \rangle = h(u) + t$, ($u \in \mathbb{S}^2$).

(i.e. par $h+t$ via la condition de contact $\langle dx, u \rangle = 0$).

où $u_L := \frac{1}{\sqrt{2}}(u; -1)$

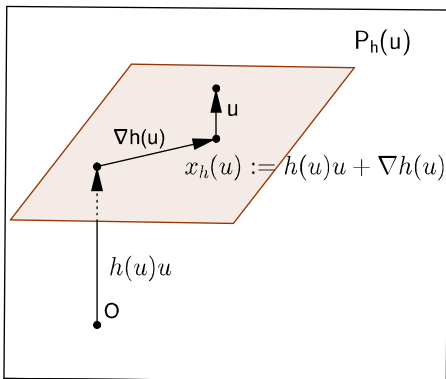
Le (co)hérisson $\mathcal{H}_{\partial h}$ est défini dans \mathbb{L}^4 comme la co-enveloppe de la famille $(L_{h+t}(u))_{(u,t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}}$ de droites lumières orientées définie par :

$$L_{h+t}(u) = \{(\nabla h(u), h(u) + t)\} + \mathbb{R}u_L$$

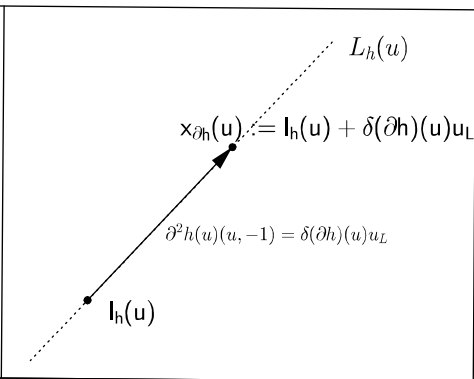
(i.e. par $\partial h = dh/\sqrt{2}$ via la condition de co-contact $\langle \delta(dx), u_L \rangle = 0$).

Constructions comparées des paramétrisations

Hérisson \mathcal{H}_h de \mathbb{R}^3



Hérisson marginalement piégé $\mathcal{H}_{\partial h}$ de \mathbb{L}^4



où $l_h(u) := (\nabla h(u); h(u))$, $(\partial h)(u) = \frac{dh(u)}{\sqrt{2}}$ et $u_L := \frac{1}{\sqrt{2}}(u; -1)$.

Analytiquement

Prendre l'enveloppe de la famille de plans $(P_h(u))_{u \in \mathbb{S}^2}$ revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \langle x, u \rangle = h(u) \\ \langle x, \cdot \rangle = dh_u(\cdot) \end{cases}$$

pour tout u dans \mathbb{S}^2 .

Prendre la co-enveloppe de la famille de droites lumières $(L_h(u))_{u \in \mathbb{S}^2}$ revient à résoudre

$$\begin{cases} \begin{cases} \langle x, u_L \rangle_L = h(u) / \sqrt{2} \\ \langle x, du_L \rangle_L = \partial h(u) \end{cases} \\ \langle x, \Delta u_L \rangle_L = \delta(dh)(u), \end{cases}$$

pour tout u dans \mathbb{S}^2 .

La condition de contact (d) nous permet d'écrire $\langle x, du \rangle = d(\langle x, u \rangle)$.

La condition de co-contact (δ) permet d'écrire $\langle x, \Delta u_L \rangle_L = \Delta(\langle x, u_L \rangle_L)$ pourvu que $\langle dx, u_L \rangle = 0$.

Sens des conditions de contact et de co-contact

Rappel. Pour toute application $x : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ de classe C^2 et tout $u \in \mathbb{S}^2$, la “dérivée seconde” $\Delta x(u) = \delta(dx)(u)$ mesure, à la fois en direction et en magnitude, la déviation de $x(u)$ par rapport à la moyenne de x sur une sphère infinitésimale centrée en u dans \mathbb{S}^2 .

Condition (d) $\langle dx, u \rangle = 0$ sur $x : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$	Condition (δ) $\langle \delta(dx), u_L \rangle_L = 0$ sur $x : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$.
Pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, u est orthogonal à l'espace tangent $T_{x(u)}x(\mathbb{S}^2) = T_u x(T_u \mathbb{S}^2)$ dans $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.	Pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, u_L est orthogonal à la mesure de déviation $\Delta x(u) = \delta(dx)(u)$ dans $(\mathbb{L}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$

$$\text{où } u_L := \frac{1}{\sqrt{2}}(u; -1).$$

Retour sur la construction du hérisson marginalement piégé $x_{\partial h} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{H}_{\partial h} \subset \mathbb{L}^4$, où \mathbb{L}^4 est identifié avec Σ .

Pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, $x = x_{\partial h}(u)$ est la sphère orientée (éventuellement réduite à un point) de \mathbb{R}^3 qui vérifie :

$$\begin{cases} (1) & x \in L_h(u) = \{(\nabla h(u), h(u))\} + \mathbb{R}u_L \\ (2) & \langle x, \Delta u_L \rangle = \delta(dh)(u). \end{cases}$$

- La condition (1) nous assure simplement que l'élément de contact $i_h(u) := (x_h(u), u)$ est en contact orienté avec la sphère $x_{\partial h}(u)$ (i.e. $x_h(u) \in x_{\partial h}(u)$ et u est le vecteur normal à $x_{\partial h}(u)$ en $x_h(u)$).
- La seconde condition (celle de co-contact) assure alors que $x_{\partial h}(u)$ est plus précisément la sphère moyenne orientée (ou point milieu non orienté) $S\left(\frac{1}{2}(c_h^1 + c_h^2)(u); \frac{1}{2}(R_1 + R_2)(u)\right)$.

Autre exemple

Si l'on remplace $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ par $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$, où $\langle x, x' \rangle_L = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 - x_3 x'_3$, et \mathbb{S}^2 par la 'sphère unité'

$$\mathbf{H}^2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3 \mid \langle x, x \rangle_L = -1\},$$

qui est un hyperboloïde à deux nappes de courbure constante égale à -1 pour la métrique induite, on obtient une correspondance analogue entre

Hérissons \mathcal{H}_h de \mathbb{L}^3 définis par une fonction de support $h \in C^\infty(\mathbf{H}^2; \mathbb{R})$ et une condition de contact $\langle dx, v \rangle_L = 0$, ($v \in \mathbf{H}^2$)

et

Hérissons marginalement piégés $\mathcal{H}_{\partial h}$ de $\mathbf{M}^4 = (\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$, où $\langle (x, t), (x', t') \rangle_M := x_1 x'_1 + x_2 x'_2 - x_3 x'_3 + t t'$ déterminés par la différentielle $\partial h := dh / \sqrt{2}$ d'une telle fonction et une condition de co-contact $\langle \delta(dx), v_M \rangle_M = 0$, où $v_M := \frac{1}{\sqrt{2}}(v, -1)$.

Un très grand merci à tous !

Un grand merci de m'avoir prêté attention!

